Formule di Gauss–Green (2 parte)

Esercizio 1 Dato il campo $F = (\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$ calcolare il flusso uscente dall'ellisse di equazione cartesiana $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Esercizio 2 Calcolare il lavoro compiuto dal campo di forze $F = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ per percorrere in senso antiorario la frontiera del dominio $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq y \leq 4 - x^2\}$.

Ora vogliamo ottenere delle uguaglianze a partire dal teorema della divergenza. Ricordiamo che questo ci assicura che dato un campo regolare $F = (F_1, F_2)$ in un dominio D allora vale la seguente uguaglianza

$$\int\int_D \mathbf{d}ivF \, dxdy = \int_{\partial D} < F, \vec{n} > \, ds,$$

dove $\mathbf{d}ivF = \partial_x F_1 + \partial_y F_2$.
Consideriamo due funzioni u e v C^2 in D e scegliamo $F = u\nabla v = (uv_x, uv_y)$, scriviamo il teorema della divergenza per questo campo, otteniamo

$$\int\int_D u_x v_x + u_y v_y \, dxdy = \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n} ds - \int\int_D u\Delta v \, dxdy. \tag{1}$$

Nel primo termine del secondo membro compare la derivata normale esterna di v. Questo perché per ogni versore $\vec{n}$ si ha $< \nabla v, \vec{n} >= \frac{\partial v}{\partial n}$. L' operatore $\Delta v = v_{xx} + v_{yy}$ si chiama Laplaciano e gioca un ruolo fondamentale in molte equazioni della fisica matematica. L' equazione (1) si chiama prima formula di Green. Scambiando il ruolo delle funzioni u e v otteniamo la seguente uguaglianza

$$\int\int_D u_x v_x + u_y v_y \, dxdy = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \int\int_D v\Delta u \, dxdy. \tag{2}$$

Sottraendo le due equazioni precedenti otteniamo

$$\int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \int\int_D u\Delta v - v\Delta u \, dxdy, \tag{3}$$

questa è comunemente nota come seconda formula di Green ed è molto utile per studiare le soluzioni dell' equazione di Laplace $\Delta u = 0$. Per esempio osserviamo che se poniamo $v = 1$ nella (3) e supponiamo che la funzione u sia soluzione dell' equazione di Laplace, si ottiene

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = 0$$

sulla frontiera di un qualsiasi dominio D.

Una interpretazione fisica molto interessante alle formule di Gauss–Green e Stokes si ha studiando il moto di un liquido su un piano (per una trattazione più completa si consiglia di vedere il Courant John vol. II/2 pag 569). Introducendo le seguenti variabili fisiche; la densità del liquido $\rho(x, y, t)$ che dipenderà in generale dal tempo e dal punto del piano che consideriamo e il campo di velocità $v = (v_1(x, y, t), v_2(x, y, t))$ anch' esso dipendente dalle variabili spaziali oltre che dal tempo. Dato un dominio D si può scrivere la seguente equazione di conservazione della massa

$$-\int\int_D \rho_t \, dxdy = \int_{\partial D} < \rho v, \vec{n} > \, ds, \tag{4}$$

entrambi i termini dell' uguaglianza precedente rappresentano la quantità di liquido che esce (o che entra se il segno è negativo) dal dominio D nell' unità di tempo. Tramite il teorema della divergenza possiamo riscrivere il secondo membro della (4) ed otteniamo quindi

$$-\int\int_D \rho_t \, dxdy = \int\int_D \mathbf{d}iv(\rho v) \, dxdy.$$

Dal momento che questa equazione deve essere verificata in ogni dominio D, si ottiene la seguente equazione alle derivate parziali

$$\rho_t + \mathbf{d}iv(\rho v) = 0,$$

questa si chiama legge di conservazione della massa.
Se la densità ρ è costante, questo accade per i liquidi omogenei ed incomprimibili allora l'equazione precedente diventa $\mathbf{d}iv(v) = 0$.

In tal caso se scegliamo un qualsiasi dominio D in cui il campo delle velocità v è regolare otteniamo per il teorema della divergenza che

$$\int_{\partial D} < v, \vec{n} > \, ds = 0$$

e quindi la quantità di liquido che esce dal dominio D è nulla.
Rimaniamo nel caso $\rho = cost$. Vediamo ora un' interpretazione del teorema di Stokes per il campo v. In tal caso sappiamo che dato un qualsiasi dominio D in cui il campo v sia regolare, si ha che

$$\int\int_D \mathbf{r}ot(v) \, dxdy = \int_{\partial D} < v, \vec{t} > \, ds$$

Il secondo membro dell' uguaglianza precedente rappresenta la circolazione del liquido intorno alla frontiera del dominio D. La quantità $\mathbf{r}ot(v)$ si chiama vorticità ed è strettamente legata alla circolazione del liquido come mostra l' equazione di sopra. In particolare se $\mathbf{r}ot(v) = 0$ in tutto D la circolazione è nulla. In tal caso, come noto, il campo si dice irrotazionale in D.
Supponiamo di considerare un liquido omogeneo incomprimibile e irrotazionale in un dominio semplicemente connesso. La Proposizione 1 ci assicura che il campo è conservativo, ovvero esiste un potenziale Φ tale che $\nabla\Phi = -v$. D'altra parte sappiamo che deve essere $\mathbf{d}iv(v) = 0$, mettendo insieme queste cose otteniamo che il potenziale verificherà l'equazione di Laplace $\Delta\Phi = 0$. Esempi di potenziali che verificano l'equazione di Laplace sono dati rispettivamente da $\Phi_1 = \log\sqrt{x^2+y^2}$ e $\Phi_2 = \arctan\frac{y}{x}$ questi danno luogo a campi di velocità definiti in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Esercizio 3 Dati i due potenziali di sopra $\Phi_i,\ i = 1,2$ si trovino i rispettivi campi di velocità $v^i = (v_1^i, v_2^i),\ i = 1,2$. Si verifichi che questi sono definiti in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si calcolino le seguenti quantità

$$\int_\gamma < v^i, \vec{t} > \, ds, \quad \int_\gamma < v^i, \vec{n} > \, ds,$$

per $i = 1,2$, dove γ è una qualsiasi curva chiusa contenuta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.