Formule di Gauss–Green

In queste lezioni vogliamo studiare il legame esistente tra integrali in domini bidimensionali ed integrali curvilinei sulla frontiera di questi. In seguito ci occuperemo del problema analogo nello spazio tridimensionale. Il punto di partenza essenziale è il **Teorema Fondamentale del Calcolo**, il nome del teorema già indica la sua importanza. Questo ci dice che data una funzione $f \in C([a,b])$ ed F una sua primitiva vale la seguente uguaglianza

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Come ben sapete questo ci permette di calcolare gli integrali definiti di moltissime funzioni, tutto si riduce a trovare una primitiva, ovvero una funzione F tale che $F' = f$.
Nel caso unidimensionale esiste quindi un legame tra l'integrale della derivata di una funzione nell' intervallo $[a,b]$ ed i valori della stessa funzione sulla frontiera ovvero nei punti a e b. Tutto ciò si può generalizzare al caso di n varibili. Per ora consideriamo $n = 2$. La frontiera di un dominio del piano in generale sarà una curva. Richiamiamo gli integrali di una funzione su una curva. Data una curva semplice e regolare γ parametrizzata tramite $(x(t), y(t))$ con $t \in [a,b]$ ed una funzione f continua su γ definiamo l'integrale di f su γ come

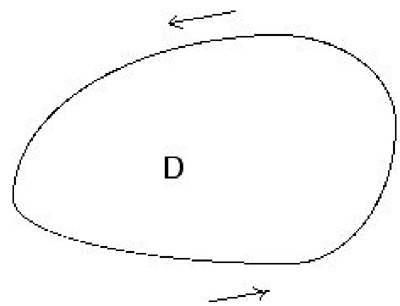
$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

questo integrale non dipende dalla parametrizzazione ma solo dal supporto della curva. Un altro concetto che avete già incontrato è quello di integrale di un campo $F \equiv (F_1, F_2)$ lungo una curva, che ha l'interpretazione fisica del lavoro lungo un cammino. Questo si può definire come

$$\int_\gamma < F, \vec{t} > \,ds \tag{1}$$

dove con $< \cdot, \cdot >$ indichiamo il prodotto scalare, mentre $\vec{t}$ è il campo definito su γ dato dal vettore tangente alla curva normalizzato ad 1. In altre parole $\vec{t}(x(t), y(t)) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}(x'(t), y'(t))$. In questo modo l'integrale in (1) si riscrive come

$$\int_a^b F_1(x(t), y(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t))y'(t)\,dt. \tag{2}$$



Questo dipende dalla parametrizzazione solo nella scelta dal verso del vettore $\vec{t}$, ovvero dal verso di percorrenza della curva, un modo usuale per indicare (2) è

$$\int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy$$

dove con γ sottintendiamo oltre al supporto della curva anche il suo orientamento. Le definizioni precedenti si estendono facilmente al caso in cui γ è data tramite unione finita di curve regolari.

Dato un dominio chiuso $D \subset R^2$ e due funzioni f e g regolari in D, ci proponiamo di dimostrare le seguenti uguaglianze, note come **formule di Gauss–Green**

$$\int\int_D f_x\,dxdy = \int_{\partial D} f\,dy, \int\int_D g_y\,dxdy = -\int_{\partial D} g\,dx. \tag{3}$$

il verso di percorrenza sulla frontiera di D è quello per cui il dominio rimane alla sinistra della frontiera (vedi Figura 1). Queste uguaglianze si possono pensare come un' estensione del teorema fondamentale del calcolo in $\mathbb{R}^2$. Prima di dimostare le formule di Gauss–Green nel caso di domini particolari vediamo un' utile applicazione. Consideriamo la funzione $f(x,y) = x$, allora usando la prima delle uguaglianze in (3) otteniamo

$$\int\int_D dxdy = \int_{\partial D} x\,dy, \tag{4}$$

il primo membro nell' uguaglianza di sopra coincide con la misura di D (la sua area) e la (4) ci permette di calcolare l'area di un insieme tramite un integrale curvilineo. Un risultato analogo lo troviamo usando la seconda delle formule di Gauss–Green, in tal caso usando la funzione $g(x,y) = y$ otteniamo

$$\int\int_D dxdy = -\int_{\partial D} y\,dx.$$

Esempio 1 Sia D il cerchio di centro l'origine e raggio 1, vediamo se è verificata la (4). L'area di D sappiamo che è uguale a π. Ora scegliamo come parametrizzazione per ∂D la classica $(x(t), y(t)) = (cos(t), sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Osserviamo che questa parametrizzazione ci fornisce il corretto verso di percorrenza. Il secondo membro della (4) diventa

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = \pi.$$

Esercizio 1 Sia $h(s)$ una funzione derivabile e positiva nell' intervallo $[a, b]$, sappiamo che $\int_a^b h(s)\, ds$ ci da' l'area della regione D che si trova sotto il grafico della funzione h. Si verifichi questo fatto attraverso una delle uguaglianze di Gauss–Green.

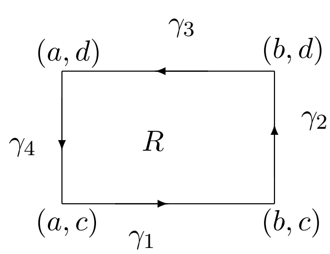
Sommando la (4) e la formula che la segue si ottiene, dopo aver diviso per 2, la seguente uguaglianza

$$A(D) = \int\int_D dxdy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\, dx + x\, dy.$$

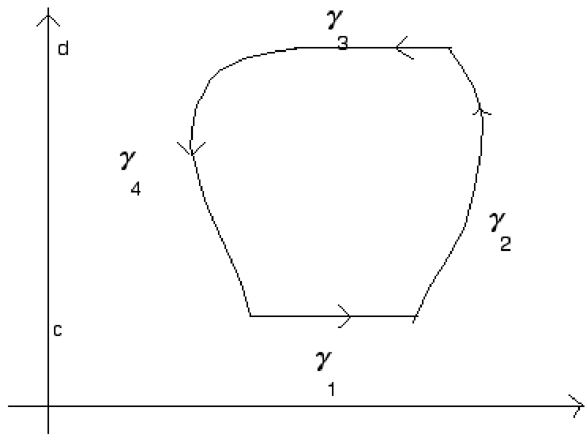
In alcuni casi questa può essere utile, provate ad utilizzarla per risolvere l'esercizio che segue.

Esercizio 2 Data la curva (cardioide) di equazioni parametriche $x(t) = (1 - \cos t)\cos t, \;\; y(t) = (1 - \cos t)\sin t$, si calcoli l'area del dominio delimitato da tale curva.

Cominciamo a verificare le formule di Gauss–Green nel generico rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$



Verifichiamo la prima delle due uguaglianze in (3), l'altra seguirà in modo analogo. Osserviamo che la frontiera di R si può scrivere come somma di 4 curve regolari $\gamma_1, \cdots, \gamma_4$ le cui parametrizzazioni sono date rispettivamente da $\gamma_1 \equiv (t, c)$, $t \in [a, b]$, $\gamma_2 \equiv (b, t)$, $t \in [c, d]$, $-\gamma_3 \equiv (t, d)$, $t \in [a, b]$, $-\gamma_4 \equiv (a, t)$, $t \in [c, d]$. Abbiamo scritto $-\gamma_3$ e $-\gamma_4$ per ricordarci che con



queste parametrizzazioni le curve sono percorse in verso opposto a quello corretto, perciò dovremo operare un cambio di segno. Cominciamo a scrivere il secondo membro dell' uguaglianza che vogliamo dimostrare

$$\int_{\partial R} f\,dy = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial\gamma_i} f\,dy = \int_a^b 0\,dt + \int_c^d f(b,t)\,dt - \int_a^b 0\,dt - \int_c^d f(a,t)\,dt.$$

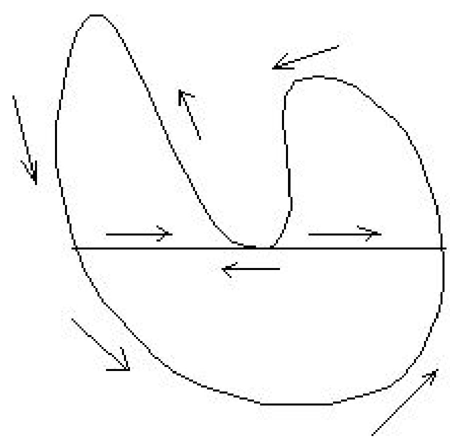
Ora consideriamo il primo membro, utilizzando le note proprietà per gli integrali doppi e il teorema fondamentale del calcolo otteniamo

$$\int\int_R f_x(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f_x(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d f(b,y) - f(a,y)\,dy.$$

Da cui segue la verifica dell' uguaglianza tra i due membri.
Proviamo ora la prima delle uguaglianze di Gauss–Green in un dominio normale rispetto alla variabile y, supponiamo quindi che $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, dove x_1 e x_2 sono due funzioni regolari. Utilizzando le formule di riduzione per gli integrali multipli il primo membro della prima formula di Gauss–Green si scrive

$$\int_c^d \left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f_x(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d f(x_2(y),y) - f(x_1(y),y)\,dy.$$

D'altra parte la frontiera di D si può dividere come unione di quattro curve, su γ_1 e γ_3 gli integrali sono nulli dal momento che non c'è variazione nella



variabile y, mentre $\gamma_2 \equiv (x_2(t), t)$ con $t \in [c, d]$ e $-\gamma_4 \equiv (x_1(t), t)$ con $t \in [c, d]$ (vedi figura di sopra). Come prima mettiamo il segno meno davanti a γ_4 per puntualizzare il fatto che con questa parametrizzazione la curva è percorsa in verso opposto a quello di γ_4.
Se andiamo a considerare il secondo membro nella formula di Gauss–Green otteniamo

$$\int_{\partial D} f\, dy = \int_{\gamma_2} f\, dy + \int_{\gamma_4} f\, dy = \int_c^d f(x_2(t), t)\, dt - \int_c^d f(x_1(t), t)$$

da cui segue la tesi.
Per ripetere la dimostrazione per l'altra formula di Gauss–Green abbiamo bisogno che il dominio sia normale rispetto alla variabile x.
L' idea per dimostrare le formule di Gauss–Green nel caso di domini più generali consiste nel dividere il dominio dato in tanti sottodomini in cui già sappiamo che valgono le formule di Gauss–Green. In tal modo le cose funzionano in quanto gli integrali sulle parti di frontiera che aggiungiamo si elidono perché vengono contate 2 volte con segno opposto. Infatti supponiamo che il dominio D sia come nella figura di sopra, ovvero $D = \sum_{i=1}^n D_i$

e che in ogni D_i valgano le formule di Gauss–Green, allora

$$\int\int_D f_x(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^n \int\int_{D_i} f_x(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} f\,dy = \int_{\partial D} f\,dy.$$

e analogamente

$$\int\int_D g_y(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^n \int\int_{D_i} g_y(x,y)\,dxdy = -\sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} g\,dx = -\int_{\partial D} f\,dy.$$

Se sommiamo le due uguaglianze in (3) otteniamo la seguente

$$\int\int_D f_x + g_y\,dxdy = \int_{\partial D} f\,dy - g\,dx. \tag{5}$$

Possiamo dare un' interpretazione interessante della (5) introducendo il concetto di divergenza di un campo F. Sia $F = (F_1, \cdots, F_n)$ un campo definito in un dominio D di $\mathbb{R}^n$ (ognuna delle F_i è una funzione in D) allora si definisce la funzione divergenza di F tramite

$$\mathrm{div}(F) = \partial_{x_1} F_1 + \partial_{x_2} F_2 + \cdots + \partial_{x_n} F_n.$$

Usando questa definizione possiamo osservare che l'integranda del primo membro di (5) corrisponde proprio con la divergenza del campo $F = (f, g)$. Per quanto riguarda il secondo membro, utilizzando una parametrizzazione (che ci fornisce l'orientamento della curva appropriato) lo riscriviamo come

$$\int_a^b f(x(t), y(t))y'(t) - g(x(t), y(t))x'(t)\,dt$$

ora osserviamo che in ogni punto della curva il vettore

$$\vec{n}(x(t), y(t)) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}(y'(t), -x'(t))$$

è il versore normale alla curva nel punto che ha come verso quello che punta all' esterno del dominio D. Riepilogando la (5) si può riscrivere come

$$\int\int_D \mathrm{div} F\,dxdy = \int_{\partial D} < F, \vec{n} > \,ds$$

questo si chiama anche **Teorema della Divergenza** e ci dice che dato un campo regolare in un dominio D allora l' integrale della divergenza del campo nel dominio è uguale all'integrale curvilineo sulla frontiera di D della componente del campo lungo la normale esterna, ovvero alla quantità di flusso uscente da D.

Esercizio 3 Dato il campo $F = (x^2y, xy)$, calcolare il flusso del campo uscente dal quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Vediamo anche un 'altra interpretazione della (5), scegliamo un campo $B = (a, b)$, utilizzando le formule di Gauss Green otteniamo

$$\int\int_D b_x - a_y \, dxdy = \int_{\partial D} a \, dx + b \, dy. \tag{6}$$

Vediamo il senso della formula precedente. Richiamiamo a tale proposito la definizione di rotore di un campo $B \equiv (a, b, c)$ definito in $\mathbb{R}^3$, questo sarà un vettore avente come componenti

$$\text{rot}B = (c_y - b_z, a_z - c_x, b_x - a_y).$$

Quindi l' integranda del primo membro della (6) si può scrivere come $(\text{rot}B)_z$, ovvero come la terza componente del vettore rotore di B (a volte rot$B$ si indica anche come curl$B$). In questo modo vediamo che l' uguaglianza (6) si può scrivere anche come (si ricordi la (1))

$$\int\int_D (\text{rot}B)_z \, dxdy = \int_{\partial D} < B, \vec{t} > \, ds. \tag{7}$$

Il secondo membro rappresenta il lavoro del campo di forze B lungo la curva chiusa ∂D. La precedente uguaglianza prende il nome di **Teorema di Stokes**.

Il Teorema di Stokes è molto utile per risolvere i seguenti esercizi.

Esercizio 4 Calcolare il lavoro che deve svolgere il campo di forze $F = (xy, -x - 2xy)$ nel trasportare una particella lungo la frontiera del quadrato $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \le x \le 1, \, 0 \le y \le 1\}$ percorsa in senso antiorario.

Esercizio 5 Calcolare il lavoro che deve svolgere il campo di forze $F = (-x^2y, xy^2)$ nel trasportare una particella lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorsa in senso antiorario.

Un' applicazione molto interessante del Teorema di Stokes si ha nella teoria dei campi irrotazionali. Sappiamo che una condizione necessaria affinché un campo sia conservativo, ovvero che questo sia il gradiente di un' opportuna funzione scalare, è che il campo sia irrotazionale cioé che abbia rotore nullo, in altre parole deve essere $\partial_x F_2 = \partial_y F_1$. Questa sappiamo che è solo una condizione necessaria ma non sufficiente, diventa sufficiente se il dominio D in cui studiamo il campo verifica alcune proprietà geometriche, ad esempio se è un insieme stellato. Ora la (7) ci permette di estendere l' insieme dei domini in cui l' irrotazionalità implica la conservatività del campo.

Definizione 1 *Un dominio D si dice semplicemente connesso se data una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti, il suo sostegno è la frontiera di un insieme $B \subset D$.*

Un dominio semplicemente connesso si può pensare come un insieme che non ha buchi.

Proposizione 1 *Sia $F = (F_1, F_2)$ un campo vettoriale irrotazionale definito in un dominio D semplicemente connesso, allora il campo F sarà conservativo in D.*

Dimostrazione Sappiamo che una condizione necessaria e sufficiente affinché un campo sia conservativo in un dominio D è che il lavoro compiuto dal campo F su qualsiasi curva chiusa regolare a tratti contenuta in D sia nullo. Ora fissiamo una curva chiusa γ e valutiamo il lavoro di F su questa. Dal momento che D è semplicemente connesso abbiamo che esiste un insieme B in D tale che la curva γ è la frontiera di B. Scriviamo la formula di Stokes per il dominio B e otteniamo, ricordandoci che il campo è irrotazionale,

$$\int_\gamma < F, \vec{t} > \, ds = \int_\gamma F_1 \, dx + F_2 \, dy = \int \int_B \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \, dxdy = 0.$$

Da cui la tesi.
Cosa possiamo dire se il dominio non è semplicemente connesso? Prima cosa vediamo come può essere fatto un tale dominio. Se consideriamo un insieme con un buco questo non sarà semplicemente connesso, in realtà basta che manchi un solo punto all'insieme per non essere semplicemente connesso. Esempio classico $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Sappiamo che il campo $F = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ è irrotazionale definito proprio in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e non è conservativo in tale insieme. Il teorema di Stokes ci da comunque delle informazioni per i campi irrotazionali. Supponiamo di avere un dominio D con un buco come nella figura che segue

Se applichiamo la (6) ad un campo irrotazionale F otteniamo

$$\int_{\partial D} < F, \vec{t} > \, ds = 0.$$

La frontiera di D è formata da due curve γ_1 e γ_2, se pensiamo entrambe le curve percorse in senso antiorario, abbiamo che il giusto verso di percorrenza (quello che lascia alla sinistra il dominio D) è tale che la curva γ_2 sia invece percorsa in senso orario, per tale motivo c'è scritto $-\gamma_2$ nella figura. L'uguaglianza di sopra si può riscrivere

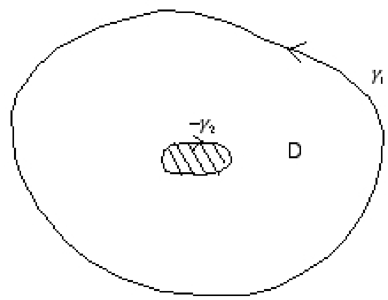


Figura 1:

$$\int_{\gamma_2} < F, \vec{t} > \, ds = \int_{\gamma_1} < F, \vec{t} > \, ds. \tag{8}$$

Perciò gli integrali curvilinei sulle due curve coincidono. Se ora consideriamo una terza curva chiusa γ_3 che non circonda il buco, otteniamo, applicando il teorema di Stokes al dominio in cui essa è la frontiera,

$$\int_{\gamma_3} < F, \vec{t} > \, ds = 0.$$

Se consideriamo una quarta curva chiusa γ_4 che gira attorno al buco abbiamo

$$\int_{\gamma_2} < F, \vec{t} > \, ds = \int_{\gamma_4} < F, \vec{t} > \, ds = \int_{\gamma_1} < F, \vec{t} > \, ds.$$

Queste uguaglianze si ottengono applicando il teorema di Stokes rispettivamente ai domini delimitati dalle curve γ_2 e γ_4 e γ_4 e γ_1 (vedi figura 2).

Le considerazioni precedenti permettono di semplificare, nel caso di un campo irrotazionale, il calcolo dell' integrale del campo lungo un qualsiasi cammino chiuso. Nell'esempio precedente abbiamo solo 2 casi; o il cammino gira intorno al buco oppure no. Nel primo caso l'integrale si può calcolare scegliendo una qualsiasi curva che circonda il buco, quella che ci fa più comodo, nel secondo l'integrale fa 0. Cosa succede se la curva non è semplice? Se la curva non è semplice e si attorciglia più volte intorno al buco, allora l'integrale è dato dal prodotto dell'integrale curvilineo di una qualsiasi curva semplice che gira intorno al buco moltiplicato per il numero di giri che compie la curva data.

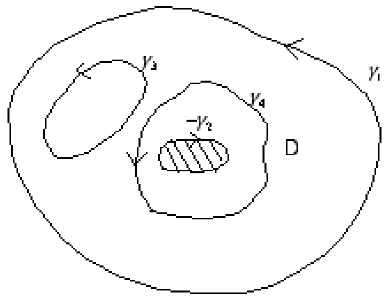


Figura 2:

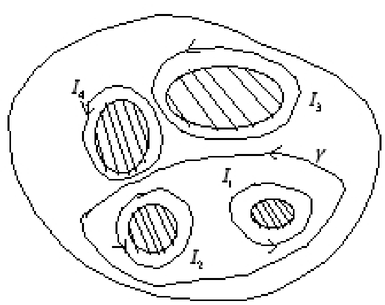


Figura 3: Un dominio con 4 buchi, per calcolare l'integrale sulla curva γ basterà sommare gli integrali fatti sui due cammini I_1 e I_2

Risultati analoghi si avranno quando il dominio in questione ha un numero finito n di buchi. In tal caso per sapere quanto fa l'integrale del campo lunga una qualsiasi curva chiusa si procederà nel seguente modo. Si scelgono n cammini che circondano ognuno un singolo differente buco, si calcolano gli integrali su questi cammini. Successivamente si vede quali buchi circonda la curva data. L' integrale del campo sulla curva sarà uguale alla somma degli integrali sui singoli buchi circondati (vedi Figura 3). Perciò condizione necessaria e sufficiente affinché il campo sia conservativo è che ognuno degli n integrali fatti sui cammini prescelti sia uguale a 0.

Esempio 2 Vogliamo dimostrare che il campo $F = (\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2)}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2)})$ è conservativo nel suo insieme di definizione $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Questo è un campo irrotazionale come si verifica facendo i calcoli, d'altra parte l'insieme in cui è definito non è semplicemente connesso, infatti manca un punto. Quindi è un dominio con un buco. Ora per vedere se il campo è conservativo basterà calcolare l' integrale del campo lungo una qualsiasi curva chiusa che circonda l'origine. Prendiamo ad esempio la circonferenza C di centro $(0,0)$ e raggio 1. In tal caso si ha

$$\int_C < F, \vec{t} > \, ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) - \cos^2(t))(-\sin(t)) - 2\sin(t)\cos(t)\cos(t)\, dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} sin(t)\, dt = 0.$$

Il campo è conservativo! Un suo potenziale è dato dalla funzione $\frac{x}{x^2+y^2}$.