Il linguaggio delle forme differenziali

Concludiamo la parte dedicata alla relazione tra integrali superficiali e di volume introducendo il linguaggio delle forme differenziali, questo ha lo scopo di scrivere in forma compatta molti dei risultati ottenuti finora. La trattazione è necessariamente formale visto che uno studio rigoroso richiederebbe molto tempo. Considereremo le forme nello spazio $\mathbb{R}^3$ tenendo presente che queste si possono definire in uno spazio di dimensione qualsiasi. Indichiamo una forma differenziale col simbolo ω. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ ha interesse considerare 4 tipi di forme differenziali:
a) le 0-forme ovvero le funzioni $f(x, y, z)$;
b) le 1-forme ovvero delle cose che si scrivono

$$f_1dx + f_2dy + f_3dz$$

dove le f_i sono funzioni di $\mathbb{R}^3$;
c) le 2-forme ovvero delle cose che si scrivono

$$h_1dydz + h_2dzdx + h_3dxdy$$

dove le h_i sono funzioni di $\mathbb{R}^3$;
d) le 3-forme ovvero delle cose del tipo $g(x, y, z)dxdydz$, dove g è una funzione di $\mathbb{R}^3$.
La parte formale sta nell'introduzione di questi oggetti dx, dy, dz. Una cosa che ci serve è un po' di algebra per trattare questi oggetti, la regola fondamentale è che se facciamo il prodotto tra due di questi non vale la proprietà commutativa anzi se cambiamo l'ordine dei fattori otteniamo un risultato di segno opposto. In altre parole $dxdy = -dydx$, $dydz = -dzdy$ e così via, in particolare il prodotto di ciascuno di questi elementi per se stesso deve fare 0 (l'unico numero che coincide con il suo opposto) quindi $dxdx = dydy = dzdz = 0$.

Supponiamo che tutte le funzioni che compaiono nelle forme differenziali siano regolari, allora possiamo passare da una n-forma ad una $(n+1)$-forma applicando il differenziale, esempio 0-forma $\omega = f$, allora $dw = df$ che è il differenziale totale ovvero $\partial_x f dx + \partial_y f dy + \partial_z f dz$ che è appunto una 1-forma. Analogamente se consideriamo una 1-forma $\omega = f_1dx + f_2dy + f_3dz$ allora $d\omega = df_1dx + df_2dy + df_3dz$ facendo il differenziale totale di ognuna delle funzioni f_i e utilizzando l'algebra di sopra per gli oggetti dx, dy e dz, si ottiene

$$\begin{aligned}
&d\omega = (\partial_x f_1 dx + \partial_y f_1 dy + \partial_z f_1 dz)dx+\\
&(\partial_x f_2 dx + \partial_y f_2 dy + \partial_z f_2 dz)dy+\\
&(\partial_x f_3 dx + \partial_y f_3 dy + \partial_z f_3 dz)dz =\\
&(\partial_x f_2 - \partial_y f_1)dxdy + (\partial_z f_1 - \partial_x f_3)dxdz + (\partial_y f_3 - \partial_z f_2)dydz
\end{aligned} \tag{1}$$

che è una 2-forma.

Torniamo agli oggetti che ci interessano che sono gli integrali su curve e superfici. Dato un campo $F = (F_1, F_2)$ definito in un dominio di $\mathbb{R}^2$, abbiamo già usato la notazione $\int_\gamma F_1 dx + F_2 dy$ per indicare $\int_\gamma < F, \vec{t} > \, ds$ ovvero il lavoro fatto da un campo di forze lungo una curva, questa scrittura risulta particolarmente utile perchè aiuta a ricordare il modo in cui calcolare il lavoro di sopra una volta passati alla parametrizzazione della curva.
Cosa del tutto analoga si può fare in $\mathbb{R}^3$, se $F = (F_1, F_2, F_3)$ allora si può scrivere

$$\int_\gamma < F, \vec{t} > \, ds = \int_\gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Consideriamo ora un integrale superficiale del tipo $\int_S < F, \vec{n} > \, d\sigma$ dove S è una superficie orientata di $\mathbb{R}^3$, questo tipo di integrali compaiono sia nel teorema di Stokes che in quello della Divergenza. Se consideriamo una parametrizzazione della superficie S che da l'orientamento giusto ($\vec{n} = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}}$) l'integrale di sopra si scrive in coordinate

$$\int_K [F_1(y_u z_v - y_v z_u) + F_2(-x_u z_v + x_v z_u) + F_3(x_u y_v - x_v y_u)] \, dudv,$$

torniamo alla parte più formale delle forme differenziali ci ricordiamo che lungo la superficie S si ha $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$, allora con il linguaggio delle forme differenziali ci accorgiamo che $dxdy = (x_u du + x_v dv)(y_u du + y_v dv) = (x_u y_v - x_v y_u)dudv$ analogamente $dydz = (y_u du + y_v dv)(z_u du + z_v dv) = (y_u z_v - y_v z_u)dudv$ e $dzdx = (z_u du + z_v dv)(x_u du + x_v dv) = (-x_u z_v + x_v z_u)dudv$ e quindi l'integrale di sopra si può scrivere come un integrale su una 2-forma ovvero

$$\int_S F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy.$$

A questo punto siamo maturi per scrivere in forma compatta molti risultati visti finora, data una n-forma ω e dato D un dominio di dimensione n+1 in $\mathbb{R}^3$ si ha

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega \tag{2}$$

con ∂D intendiamo la frontiera del dominio D.
Vediamo di rileggere la (2) tramite le varie n-forme.

Caso 1: ω è una 0-forma. $\omega = f(x,y,z)$, allora D ha dimensione 1 è quindi una curva γ la cui frontiera è data da due punti (eventualmente coincidenti) che chiamiamo P_1 e P_0 allora la (2) ci dice che

$$\int_\gamma d\omega = \int_\gamma \partial_x f dx + \partial_y f dy + \partial_z f dz = f(P_1) - f(P_0)$$

ovvero il ben noto fatto che il lavoro compiuto da un campo conservativo lungo una curva è dato dalla differenza dei valori assunti dal suo potenziale agli estremi della curva.

Caso 2: ω è una 1-forma. $\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$, allora D ha dimensione 2 è quindi una superficie S la cui frontiera sarà una curva γ. Abbiamo visto nella (1) che $d\omega = (\partial_x f_2 - \partial_y f_1)dxdy + (\partial_z f_1 - \partial_x f_3)dxdz + (\partial_y f_3 - \partial_z f_2)dydz$, ora consideriamo il campo $F = (f_1, f_2, f_3)$ facciamone il rotore e ricordiamo che $dxdz = -dzdx$, otteniamo che si può scrivere $d\omega = (\mathbf{r}otF)_x dydz + (\mathbf{r}otF)_y dzdx + (\mathbf{r}otF)_z dxdy$. Allora da quanto visto precedentemente il primo membro della (2) diventa

$$\int_S (\mathbf{r}otF)_x dydz + (\mathbf{r}otF)_y dzdx + (\mathbf{r}otF)_z dxdy = \int_S < \mathbf{r}otF, \vec{n} > \, d\sigma,$$

mentre il secondo membro è

$$\int_{\partial S} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_{\partial S} < F, \vec{t} > \, ds$$

in altre parole la (2) non è altro che il Teorema di Stokes.

Caso 3: ω è una 2-forma. $\omega = h_1 dydz + h_2 dzdx + h_3 dxdy$, allora D ha dimensione 3 è un solido la cui frontiera sarà una superficie S. In questo caso si ha

$$d\omega = dh_1 dydz + dh_2 dzdx + dh_3 dxdy = (\partial_x h_1 + \partial_y h_2 + \partial_z h_3) dxdydz$$

quindi se consideriamo un campo $F = (h_1, h_2, h_3)$ si può scrivere $d\omega = (\mathbf{d}ivF)dxdydz$, perció la (2) diventa

$$\int_D d\omega = \int_D (\mathbf{d}ivF) dxdydz = \int_{\partial D} \omega =$$

$$\int_{\partial D} h_1 dydz + h_2 dzdx + h_3 dxdy = \int_{\partial D} < F, \vec{n} > \, d\sigma,$$

che è proprio il teorema della divergenza.