Analisi vettoriale - A.A. 2002/03

Prima prova di esonero - 31/10/2002

Esercizio 1. i) Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{y^n}{2^n} \ ;$$

ii) se ne determini l'espressione della somma;
iii) anche se non si è risposto al punto ii), si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(\tan x)^n}{2^n}\right) \, \mathrm{d}x \ .$$

Esercizio 2. Sia a un numero reale e $F_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la famiglia di funzioni definita da

$$F_a(x,y) = e^{xy} - \cos(x+y) - x - ax + ay \ .$$

i) Determinare per quali valori di a è possibile applicare all'equazione $F_a = 0$ il teorema della funzione implicita in un intorno del punto $P = (0,0)$, in modo che y sia funzione di x.
ii) Detta $f(x)$ tale funzione, si trovino ulteriori condizioni su a di modo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+x}{\sin x} = 0 \ .$$

Esercizio 3. i) Sviluppare in serie di Fourier la funzione definita in $[-\pi,\pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0) \\ \sin x & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Per il calcolo dei coefficienti possono essere utili le formule (per $k > 1$):

$$\int \sin x \cos(kx) \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(k-1)x}{k-1} - \frac{\cos(k+1)x}{k+1}\right\}$$

$$\int \sin x \sin(kx) \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(k-1)x}{k-1} - \frac{\sin(k+1)x}{k+1}\right\} \ .$$

ii) Riconoscere che la serie ottenuta converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Si determinino gli estremi assoluti della funzione $f(x,y) = x$ sull'ellisse di equazione $13(x^2+y^2) - 10xy = 16$.