

Analisi vettoriale - A.A. 2003/04

Foglio di esercizi n.7

Esercizio 1. Studiare la convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+3)!}{(2n)!} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3(x-\sqrt{2})^n}{\log(n+1)}.$$

Esercizio 2. Studiare l'insieme di convergenza della somma di serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+3} (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3} (x-1)^n.$$

Esercizio 3. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-nx^2}.$$

Esercizio 4. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{|x|}{4^n}\right).$$

Esercizio 5. Sia $f_n(x) = n(e^{\frac{x}{n}} - 1)$; si calcoli $f(x)$, limite puntuale della successione di funzioni in \mathbb{R} e si dica se tale convergenza è uniforme negli insiemi $[0, 1]$ e $[0, +\infty[$.

Esercizio 6. Dopo aver determinato l'insieme di convergenza della funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{4^n},$$

si calcoli l'integrale $\int_0^2 f(x) dx$.

Esercizio 7. Trovare lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ e calcolare $f^{(7)}(0)$.

Esercizio 8. Calcolare la somma delle seguenti serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{4n-1}.$$