Analisi Vettoriale - A.A. 2003-2004
Foglio di Esercizi n. 4

Esercizio 1 Assegnata l'equazione differenziale $y' = y\sin(y)$ disegnare, in modo qualitativo, i grafici delle soluzioni.

Esercizio 2 Assegnata l'equazione differenziale $y' = (y-1)(y-2)$

- disegnare, in modo qualitativo, i grafici delle soluzioni,
- usando l'equazione differenziale stessa determinare a quali quote le soluzioni possono ammettere un flesso,
- indicata con $y(x, c)$ la soluzione che soddisfa la condizione $y(0) = c \leq 2$ determinare

$$\lim_{x \to +\infty} y(x, c),$$

- sviluppare in formula di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ ed ordine $n = 3$ la soluzione $y(x, 0)$.

Esercizio 3 Determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$y' = \frac{y\ \ln(y)}{2x}, \quad y(1) = 1 \quad \text{oppure} \quad y(1) = 2.$$

Esercizio 4 Assegnata l'equazione lineare $y'\sin(x) + y\cos(x) = 2$, $0 < x < \pi$

- determinare tutte le soluzioni
- dimostrare che solo una di tali soluzioni converge per $x \to 0$.

Esercizio 5 Risolvere il problema di Cauchy lineare

$$y' = \frac{2y}{x} + x^2\sin^2(x), \quad y(1) = 0.$$

Esercizio 6 Determinare una funzione $y(x)$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y(x) \geq 0$ tale che, detta

$$B(x) = \int_0^x y(t)dt$$

l'area del sottografico di y e $A(x)$ l'area della restante parte del rettangolo di estremi $[(0,0) - (x, f(x)]$, riesca

$$A(x) = nB(x), \quad n \in N.$$

Esercizio 7 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{x-y}{x+y}, \quad y(1) = 1.$$

Esercizio 8 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = 2\frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

Esercizio 9 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{y^2}{x^2 - xy}, \quad y(1) = 2.$$

Esercizio 10 Determinare le soluzioni dei problemi

$$y' = -(x+y)^2, \quad y(0) = 1, \quad y(0) = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 11 Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = x\,y + e^{-x^2}\,y^3$$