Analisi vettoriale - A.A. 2003/04

Foglio di esercizi n.3

Esercizio 1. Calcolare l'area dell'elicoide definito dalle equazioni parametriche $x = u\cos(v)$, $y = u\sin(v)$, $z = v$, $\quad 0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$.

Esercizio 2. Calcolare l'area della catenoide, superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva del piano xz di equazione $x = \cosh(z)$, $\quad -1 \le z \le 1$.

Esercizio 3. Calcolare il momento d'inerzia della sfera unitaria S rispetto a un suo diametro, cioé ad esempio l'integrale superficiale

$$\int\int_S (x^2 + y^2)\, d\sigma.$$

Esercizio 4. Verificare il teorema della divergenza nel caso di $F = \{x, 2y, 3z\}$ sul cubo $C = [-1, 1]^3$.

Esercizio 5. Applicare il teorema della divergenza per calcolare il flusso del campo $F = \{2x, 3y, 4z\}$ uscente dalla piramide limitata dalle superfici

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Esercizio 6. Calcolare la circuitazione del campo $F = \{1, 0, y\}$ lungo il bordo della superficie $z = x + 3\sin(x^2 + y^2)$, $\quad x^2 + y^2 \le 1$.

Esercizio 7. i. Calcolare la divergenza del campo $\overrightarrow{F} = h(|\overrightarrow{r}|)\overrightarrow{r}$, essendo $h \in C^1$ ed $\overrightarrow{r}$ il vettore $\{x, y, z\}$.
ii. Calcolare il flusso della forza

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{|\overrightarrow{r}|^3}\overrightarrow{r}$$

attraverso la frontiera di un aperto contenente l'origine.

Esercizio 8. i. Calcolare l'integrale $\int_\gamma xdx + (x + y)dy + (x + y + z)dz$, dove $\gamma : x = \sin(t), y = \cos(t), z = \sin(t) + \cos(t)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$.
ii. Calcolare l'integrale precedente tramite il teorema di Stokes riferendosi alle due seguenti superfici di cui γ é bordo:

$$S_1 : \ z = x + y, \quad x^2 + y^2 \le 1$$
$$S_2 : \ z = x + y + x^2 + y^2 - 1, \quad x^2 + y^2 \le 1.$$