Analisi vettoriale - A.A. 2003/04

Foglio di esercizi n.2

Esercizio 1. Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $F(x,y) = (y+3x, 2y-x)$ per far compiere ad una particella un giro dell'ellisse $4x^2 + y^2 = 4$ in senso orario.

Esercizio 2. Calcolare l'area della regione limitata dalla retta $y = x$ e dalla curva γ di equazioni parametriche $(x(t), y(t)) = (t^2 + t, t^4 + t)$ con $t \in [0, 1]$.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F = (\frac{x-1}{((x-1)^2 + y^2)^2}, \frac{y}{((x-1)^2 + y^2)^2})$$

i) Calcolare il rotore di F
ii) Dimostrare che F é conservativo e trovare un potenziale.

Esercizio 4. Sia C la curva di equazioni parametriche $x = \cos(t), \quad y = t\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$
i) Trovare l'area della regione racchiusa
ii) Dire per quali $t \in [0, 2\pi]$ é definito il versore ν normale e calcolarlo.

Esercizio 5. Dato il campo vettoriale $F = (xy,\ (x^2 - y^2)/2)$
i) si calcolino flusso uscente e circuitazione rispetto alla curva C di equazioni parametriche $x = \cos^3(t),\ y = \sin^3(t), \quad t \in [0, 2\pi]$
ii) Dimostrare che F é un campo vettoriale conservativo in tutto R e che i suoi potenziali sono funzioni armoniche.
iii) Costruire uno di tali potenziali.

Esercizio 6. Sia $\overrightarrow{F}$ un campo irrotazionale, definito in R^2 privato dei due punti $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (2,0)$. Sapendo che

$$\int_{C_i} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{t}\, ds = i, \quad i = 1, 2$$

con C_i la circonferenza di centro P_i e raggio 1, calcolare l'integrale $\int_\gamma \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{t}\, ds$ essendo γ l'ellisse $4x^2 + 25y^2 = 25$.

Esercizio 7. i) Calcolare il lavoro del campo $F = (xy - 2, x^2 + y^2)$ lungo il segmento $(0,0) - (1,2)$ e lungo l'arco di parabola $y = 2x^2$ con gli stessi estremi
ii) sia $u(x,y) = x^3 + yx^2$: calcolare l'integrale della derivata normale di u lungo i due archi di curva dati precedentemente.