Analisi vettoriale - A.A. 2003/04

Foglio di esercizi n.1

Esercizio 1. i) Giustificare l'affermazione seguente: l'equazione $\sin(xy) = 0$ non definisce implicitamente una funzione in un intorno di $(0, 0)$.
ii) Sia $g : R^2 \to R$ definita come segue:

$$g(x, y) = xy + (y + 1)\sin x + y^2 \ .$$

Dire se l'equazione $g = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0)$ una funzione h della variabile x e/o della variabile y.
iii) Dire se la funzione h ammette minimo o massimo relativo in zero.

Esercizio 2. Sia $\quad F(x, y) = e^{x^2+2y} - y\cos x - 1$,
i) dimostrare che $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $f(x)$;
ii) calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} \ .$$

Esercizio 3. Assegnato il sistema

$$\begin{cases} e^y + z + x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$$

dimostrare che in un intorno del punto (0,0,1) il sistema definisce implicitamente due funzioni $\alpha(x), \beta(x)$ tali che $(x, \alpha(x), \beta(x))$ siano soluzioni del sistema. Calcolare poi $\alpha'(0), \beta'(0)$.

Esercizio 4. Sia $\quad F(x, y, z) = x^2y + ze^{xy} + \cos(\pi z)$,
i) dimostrare che l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una superficie $z = f(x, y)$ in un intorno del punto (0,0,1) ;
ii) determinare il piano tangente alla superficie nel punto (0,0,1).

Esercizio 5. Un tendone ha la forma di un cilindro circolare retto sormontato da un cono; sapendo che la base ha il diametro di $m.10$ e la superficie totale esterna dev'essere di $mq.100\pi$, determinare le altezze H del cilindro e h del cono in modo che il volume sia massimo.

Esercizio 6. Determinare il massimo e il minimo della funzione $G(x, y) = x - 2y$ sul vincolo $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$.

Esercizio 7. Data l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ e la retta AB passante per i suoi vertici $A = (2, 0)$ e $B = (0, 1)$, determinare sull'ellisse un punto P in modo che l'area del triangolo APB sia massima.