Equazioni Differenziali (6)

Finora ci siamo occupati di equazioni differenziali scalari $y^n = f(t, y, \ldots, y^{n-1})$, dove y è una funzione reale da determinare, ora vogliamo considerare in un caso molto semplice, sistemi di equazione differenziali. Il problema che consideriamo è quello di un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti, in altre parole vogliamo risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \\ x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. In questo caso bisogna determinare le due funzioni di variabile reale x ed y. Prima di procedere con il metodo di risoluzione facciamo qualche osservazione.
Prima osservazione: il teorema di esistenza ed unicità per sistemi ci assicura che esiste un'unica soluzione, il fatto che il problema è lineare permette di dire che tale soluzione è definita in tutto $\mathbb{R}$.
Seconda osservazione: se $x_0 = y_0 = 0$, la soluzione del problema è data da $x(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv 0$.
Terza osservazione: il problema è autonomo ovvero la variabile t, (tempo) non compare esplicitamente nel sistema. In questo caso si può verificare che se $x(t)$ e $y(t)$ verificano le due equazioni differenziali, allora per ogni s anche $x(t+s)$ e $y(t+s)$ verificano le stesse equazioni. Questo significa che se rappresentiamo la soluzione nello **spazio delle fasi** (x, y), ovvero trattiamo t come un parametro da eliminare per interessarci solo del codominio della soluzione, quello che troviamo è una curva che dipende solo dal punto di partenza (x_0, y_0).

Per trovare la soluzione procediamo nel seguente modo, guardiamo la prima equazione; se b fosse uguale a zero la prima sarebbe un' equazione del primo ordine nella sola x e quindi facilmente risolvibile, quindi una volta sostituita la soluzione x nella seconda si troverebbe subito anche la y tramite un'equazione lineare. Se invece $b \neq 0$ ricaviamo nella prima equazione differenziale y in funzione di x, $y = \frac{x' - ax}{b}$. Ora sostituiamo nella seconda equazione e troviamo

$$\frac{x'' - ax'}{b} = cx + d\frac{x' - ax}{b}$$

moltiplicando per b si ottiene $x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = 0$, che è una equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti.

Indicata con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matrice dei coefficienti abbiamo che il primo coefficiente è l'opposto della traccia di A che indichiamo con $trA = a + d$, mentre il secondo coefficiente rappresenta il determinante di A, quindi possiamo riscrivere l'equazione differenziale come $x'' - trAx' + \det Ax = 0$. L'equazione si risolve con il metodo noto, ovvero passando per l'equazione algebrica $\lambda^2 - trA\lambda + detA = 0$. Sappiamo che possono presentarsi tre casi:

1) l'equazione algebrica ha due soluzioni reali distinte λ_1 e λ_2 allora

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t};$$

2) l'equazione algebrica ha due soluzioni reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2$ allora

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t};$$

3) l'equazione algebrica ha due soluzioni complesse coniugate $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ allora

$$x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)).$$

Le due costanti si trovano imponendo la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = ax(t_0) + by(t_0) = ax_0 + by_0$. Una volta trovata la funzione x abbiamo subito la funzione $y = \frac{x' - ax}{b}$ che sarà dello stesso tipo della x ovvero una opportuna combinazione lineare di due soluzioni linearmente indipendenti come nei casi 1), 2) e 3).

Da queste osservazioni possiamo dedurre il seguente risultato

Proposizione 1 *Se la matrice A è tale che l'equazione algebrica $\lambda^2 - trA\lambda + detA = 0$ ha due soluzioni di parte reale strettamente negativa allora*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

quindi le soluzioni, indipendentemente dalla posizione iniziale (x_0, y_0), si avvicinano verso la soluzione identicamente nulla per tempi grandi.

Esempio 1 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

in questo caso $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ quindi ci possiamo ridurre a risolvere il problema $x'' - 0x' - 2x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2x(0) + 2y(0) = 2$, in questo caso $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = \sqrt{2}$, la soluzione ottenuta imponendo le condizioni iniziali è

$$x(t) = \frac{1-\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}t} + \frac{1+\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2}t}$$

mentre

$$y(t) = \frac{x'(t) - 2x(t)}{2} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}t} + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}t}.$$

Esempio 2 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = -2y(t) \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{3}$$

la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ quindi ci possiamo ridurre a risolvere il problema $x'' + 3x' + 3x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2x(0) + 2y(0) = 2$, in questo caso $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$, la soluzione ottenuta imponendo le condizioni iniziali è

$$x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

mentre

$$y(t) = e^{-2t}.$$

Potevamo anche risolvere subito la seconda equazione dal momento che questa non dipendeva dalla x. Se vogliamo rappresentare la soluzione nel piano delle fasi basta eliminare il parametro t dalle due funzioni x ed y. Siccome $y = e^{-2t}$, si avrà $x = \sqrt{y} - y$, che possiamo disegnare nel piano x, y (vedi Figura).

Dire che t va all'infinito equivale a dire che y va a zero vista la relazione tra le due e quindi x va a zero. Da questo ritroviamo che effettivamente la soluzione si avvicina all'origine (la soluzione identicamente nulla) nel piano delle fasi come ci diceva la Proposizione 1. Ovviamente nello spazio delle fasi perdiamo l'informazione sul parametro t, se vogliamo avere una rappresentazione grafica dell'andamento della soluzione al variare del parametro t possiamo mettere una freccia lungo il grafico nella direzione delle t crescenti.

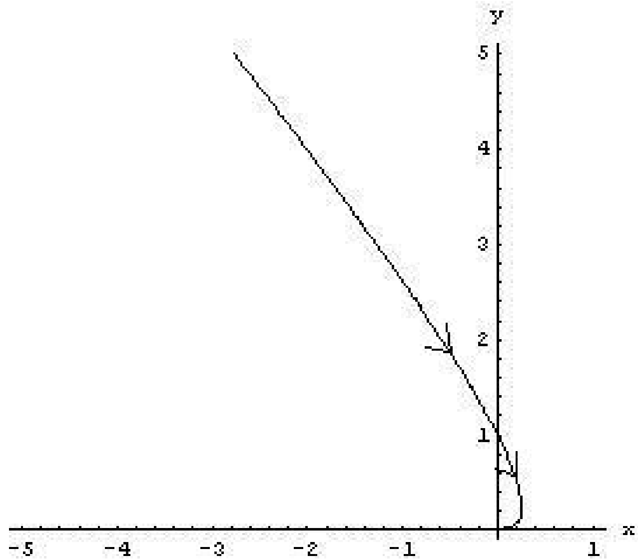

Figura 1: $x = \sqrt{y} - y$

Esercizio 1 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) \\ x(0) = 1,\, y(0) = 0, \end{cases}$$

Disegnare sul piano delle fasi la soluzione.

Esercizio 2 Al variare di x_0 e y_0 disegnare sul piano delle fasi le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ x(0) = x_0,\, y(0) = y_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \\ x(0) = x_0,\, y(0) = y_0. \end{cases}$$