# Equazioni Differenziali (5)

Data un' equazione differenziale lineare omogenea

$$y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots a_0(t)y = 0, \tag{1}$$

se i coefficienti $a_i$ non dipendono da $t$, abbiamo visto che le soluzioni si possono determinare tramite un metodo standard. Se invece i coefficienti $a_i$ sono delle funzioni di $t$ allora può essere molto complicato fornire delle soluzioni. Non esiste un metodo standard per determinarle. Concentriamoci sul caso di dimensione 2. Bisogna trovare 2 soluzioni dell'equazione omogenea. In questo caso se si riesce a determinarne 1, allora si può trovare l'altra riconducendosi ad un problema di ordine 1 (vedi Courant John vol II/2 pag. 689). Un caso più semplice si ha se manca il coefficiente di ordine 0. Infatti un'equazione $y'' + a_1(t)y' = 0$ ha come soluzioni $y_1(t) = 1$ e $y_2(t)$ che si ottiene come primitiva di una funzione $w$ che è una soluzione del problema del primo ordine $w' + a_1(t)w = 0$.

**Esempio 1** Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'' - \frac{y'}{t} = 0$. Osserviamo che questa equazione differenziale ha senso negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ e perde di significato per $t = 0$. Studiamo il problema nell'intervallo $(0, \infty)$. Una soluzione dell'equazione è data da $y_1(t) = 1$. Un' altra soluzione l'otteniamo considerando l'equazione del primo ordine $w' = \frac{w}{t}$. La soluzione generale è data da $kt$. Fissiamo ad esempio $k = 1$. Una primitiva è quindi data dalla funzione $y_2 = \frac{t^2}{2}$. Possiamo perciò scrivere la soluzione come $c_1 + c_2\frac{t^2}{2}$ o anche come $c_1 + c_2t^2$ dal momento che $c_1$ e $c_2$ sono costanti arbitrarie di $\mathbb{R}$.

Le equazioni di Eulero forniscono un altro caso in cui si riescono a trovare delle soluzioni particolari, queste equazioni sone del tipo

$$t^2y'' + aty' + b = 0$$

con $a$, $b$ costanti reali. In questo caso se ci mettiamo nell' intervallo $(0, \infty)$, (per $t = 0$ potrebbero esserci problemi in quanto l'equazione non si può scrivere in forma normale) e cerchiamo una soluzione della forma $t^\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ otteniamo

$$t^\lambda(\lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b) = 0$$

se $\lambda_0$ è una soluzione reale dell' equazione $\lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b = 0$, allora $t^{\lambda_0}$ è una soluzione dell'equazione differenziale.

**Esercizio 1** Determinare la soluzione del problema di Cauchy $t^2y'' + ty' - 4y = 0$ e dati iniziali $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

Un' equazione lineare non omogenea è un'equazione del tipo

$$y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots a_0(t)y = f(t), \tag{2}$$

avente quindi termine a secondo membro non nullo. In questo caso possiamo osservare che date due soluzioni $y_1$ e $y_2$ dell'equazione (2), la loro differenza è soluzione dell'equazione omogenea (1). Perciò la soluzione generale del problema non omogeneo si ottiene come somma di una soluzione particolare del problema (2) e della soluzione generale del problema (1). Infatti fissata $\overline{y}(t)$ una soluzione del problema (2), $z_1, \cdots, z_n$, $n$ soluzioni linearmente indipendenti del problema (1), e $y(t)$ una qualsiasi altra soluzione del problema (2), si ha che $y(t) = \overline{y}(t) + (y(t) - \overline{y}(t))$ e poichè $y(t) - \overline{y}(t)$ è soluzione del problema omogeneo è della forma $\sum_{i=1}^{n} c_i z_i(t)$, quindi

$$y(t) = \overline{y}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i z_i(t).$$

Quindi se si sa risolvere l'equazione omogenea, tutto il problema si sposta nel trovare una soluzione particolare. A tale proposito può essere utile il principio di sovrapposizione, questo dice che se il termine $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, allora se $\overline{y}_1$ è una soluzione del problema non omogeneo (2) con termine a secondo membro $f_1$ e $\overline{y}_2$ è soluzione del problema (2) con termine $f_2$, allora segue subito dalla linearità del problema che $\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2$ è una soluzione del problema con termine $f$.
Nel caso lineare a coefficienti costanti se il dato $f(t)$ ha una forma speciale del tipo $P_n(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ o $P_n(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, dove $P_n$ è un polinomio di grado $n$ e $\alpha$ e $\beta$ sono due costanti reali, si cerca una soluzione particolare di forma simile ovvero del tipo

$$\overline{y}(t) = T_n(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + S_n(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

dove $T_n$ e $S_n$ sono dei polinomi di ordine $n$ da determinare imponendo che $\overline{y}$ sia una soluzione del problema. Questo funziona se il numero complesso $z = \alpha + i\beta$ non è soluzione dell'equazione

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0. \tag{3}$$

Se invece questo è soluzione si verifica il fenomeno della risonanza, per cui il termine noto è della stessa forma della soluzione del problema omogeneo.

In tal caso se $z$ è uno zero di ordine $m$ per l'equazione (3) la soluzione particolare si cerca della forma

$$\overline{y}(t) = t^m T_n(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + t^m S_n(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t), \tag{4}$$

ovvero bisogna alzare l'ordine del polinomio. Infatti se $z = \alpha + i\beta$ è uno zero di ordine $m$ per (3), ogni funzione del tipo $G_{m-1}(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + H_{m-1}(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, con $G_{m-1}$ e $H_{m-1}$ polinomi qualsiasi di ordine $m-1$, è soluzione del problema omogeneo e quindi non può essere soluzione del problema non omogeneo.
Cercare le soluzioni in questo modo equivale a determinare i coefficienti dei nuovi polinomi $T_n$ e $S_n$, questo si fa imponendo che $\overline{y}$ sia soluzione e quindi, una volta raccolti tutti i monomi simili, uguagliando i coefficienti a zero. In questo modo si ottiene un sistema lineare che ha un'unica soluzione. Vediamo il procedimento con qualche esempio.

**Esempio 2** Vogliamo trovare la soluzione generale del problema $y'' + 4y = \sin(t)$. Il problema omogeneo associato ha due soluzioni linearmente indipendenti date da $z_1(t) = \cos(2t)$ e $z_2(t) = \sin(2t)$. Il termine noto è della forma di sopra (in questo caso $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e il polinomio è di grado 0 ovvero costante) inoltre $z = i$ non è soluzione dell' equazione $\lambda^2 + 4 = 0$, non c'è risonanza. In questo caso cerchiamo una soluzione della forma $a\cos(t) + b\sin(t)$ sostituendo nell'equazione otteniamo $a = 0$ e $b = \frac{1}{3}$. La soluzione generale è data da $y(t) = \frac{1}{3}\sin(t) + c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$.

**Esercizio 2** Risolvere il problema di Cauchy $y'' - 4y' + 4y = t^2$, di dato iniziale $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

**Esempio 3** Consideriamo l'equazione differenziale non omogenea $y''+2y'+y = e^t+e^{-t}$, vogliamo determinare la soluzione generale. Cerchiamo prima le soluzioni del problema omogeneo, al solito ci riduciamo a cercare gli zeri del polinomio $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, in questo caso $-1$ è uno zero doppio. La soluzione dell'equazione omogenea è quindi $c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$. Il termine $f(t)$ non è proprio del tipo di quelli che abbiamo visto sopra ma è comunque somma di due termini di quel tipo. Quindi grazie al principio di sovrapposizione ci cerchiamo una soluzione particolare che è data dalla somma delle soluzioni particolari dei problemi $y'' + 2y' + y = e^t$ e $y'' + 2y' + y = e^{-t}$. Per il primo problema non c'è risonanza e quindi cerchiamo una soluzione del tipo $ae^t$, dove $a$ è una costante da determinare. Sostituiamo nella prima equazione ed otteniamo $ae^t + 2ae^t + ae^t = e^t$ da cui $a = \frac{1}{4}$. Consideriamo ora il secondo problema, in questo caso c'è risonanza in quanto $-1$ è una soluzione, per giunta doppia, del polinomio $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. Allora la soluzione si cerca della forma $bt^2e^{-t}$, sostituiamo nell'equazione differenziale ed otteniamo

$$b(2e^{-t} - 4te^{-t} + t^2e^{-t}) + 2b(2te^{-t} - t^2e^{-t}) + bt^2e^{-t} = e^{-t}$$

da cui $b = \frac{1}{2}$. La soluzione generale è data quindi da $y(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}t^2e^{-t} + c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$.

I metodi descritti sopra per determinare una soluzione particolare del problema non omogeneo valgono solo nel caso in cui l'equazione è a coefficienti costanti e la funzione $f$ è di tipo particolare. Inoltre può essere piuttosto complicato risolvere sistemi lineari se il numero delle incognite aumenta troppo. Esiste un metodo per trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare non omogenea

$$y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \tag{5}$$

che vale in generale.
Procediamo nel seguente modo. Limitiamoci al caso $n = 2$, supponiamo che i coefficienti $a_0$ e $a_1$ siano definiti in un intervallo aperto $I$, definiamo la seguente funzione di due variabili $u(t, s)$ in $I \times I$, in modo che $u(\cdot, s)$ sia la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'' + a_1(t)z' + a_0(t)z = 0 \\ z(s) = 0 \\ z'(s) = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Ovviamente al variare di $s$ abbiamo una soluzione diversa, per questo otteniamo una funzione di due variabili. Attenzione a non fare confusione! $t$ è la variabile relativa all'equazione differenziale e quindi per definizione

$$\partial_{tt}u + a_1(t)\partial_t u + a_0(t)u = 0, \tag{7}$$

mentre $s$ è la variabile relativa al punto iniziale, al variare del punto iniziale otteniamo una soluzione diversa. Per definizione sarà

$$u(t, t) = 0, \ \partial_t u(t, t) = 1, \tag{8}$$

infatti calcolare le funzioni $u$ e $\partial_t u$ nei punti $(t, t)$, equivale a considerare la funzione soluzione e la sua derivata nel punto iniziale lungo il quale sappiamo a priori i valori.

Fissato $t_0$ in $I$ vogliamo verificare che la funzione

$$\overline{y}(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)u(t,s)\,ds \tag{9}$$

è soluzione. Osserviamo che (si usa la (8))

$$\begin{aligned} \overline{y}' &= f(t)u(t,t) + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(s)\partial_t u(t,s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\partial_t u(t,s)\,ds, \\ \overline{y}'' &= f(t)\partial_t u(t,t) + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(s)\partial_{tt} u(t,s)\,ds = f(t) + \int_{t_0}^{t} f(s)\partial_{tt} u(t,s)\,ds. \end{aligned} \tag{10}$$

Ora osserviamo che la (9) è soluzione infatti usando la (10) e la (8) si ottiene

$$\overline{y}'' + a_1\overline{y}' + a_0\overline{y} = f(t) + \int_{t_0}^{t} f(s)[\partial_{tt}u(t,s) + a_1(t)\partial_t u(t,s) + a_0(t)u(t,s)]\,ds = f(t).$$

Abbiamo trovato una soluzione particolare del problema non omogeneo, si vede subito che questa verifica $\overline{y}(t_0) = 0$ e $\overline{y}'(t_0) = 0$, al variare di $t_0$ avremo una soluzione diversa.
Vediamo come ottenere operativamente la soluzione (9), per far ciò dobbiamo prima determinare la funzione $u(t,s)$ soluzione di (6). Sappiamo che tutte le soluzioni del problema omogeneo sono combinazioni lineari di due soluzioni linearmente indipendenti. Supponiamo di conoscere le due soluzioni ed indichiamole con $z_1$ e $z_2$. Quindi $u(t,s) = c_1 z_1 + c_2 z_2$ dove $c_1$ e $c_2$ sono costanti determinate una volta fissato $s$ e quindi data la condizione iniziale, in generale saranno funzioni di $s$. Perció $u(t,s) = c_1(s)z_1(t) + c_2(s)z_2(t)$ e $\partial_t u(t,s) = c_1(s)z_1'(t) + c_2(s)z_2'(t)$, imponendo le condizioni iniziali si ottiene il seguente sistema lineare per $c_1$ e $c_2$

$$\begin{cases} c_1(s)z_1(s) + c_2(s)z_2(s) = 0 \\ c_1(s)z_1'(s) + c_2(s)z_2'(s) = 1, \end{cases} \tag{11}$$

da cui tramite il metodo di Cramer si ottiene

$$c_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & z_2(s) \\ 1 & z_2'(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1(s) & z_2(s) \\ z_1'(s) & z_2'(s) \end{vmatrix}}, \quad c_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} z_1(s) & 0 \\ z_1'(s) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1(s) & z_2(s) \\ z_1'(s) & z_2'(s) \end{vmatrix}}. \tag{12}$$

Si osservi che il denominatore di entrambi i secondi membri è uguale e coincide con il Wronskiano delle funzioni $z_1$ e $z_2$ calcolato in $s$, questo è diverso da 0 e lo indichiamo per semplificare le notazioni tramite la funzione $W(s)$. A questo punto possiamo scrivere in modo più esplicito la (9). Infatti

$$\overline{y}(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)(c_1(s)z_1(t) + c_2(s)z_2(t))\,ds = a(t)z_1(t) + b(t)z_2(t),$$

dove

$$a(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{-z_2(s)f(s)}{W(s)}\, ds, \quad b(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{z_1(s)f(s)}{W(s)}\, ds. \tag{13}$$

A questo punto abbiamo tutte le soluzioni del problema non omogeneo queste sono date da

$$y(t) = \overline{y}(t) + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) = a(t)z_1(t) + b(t)z_2(t) + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

al variare delle costanti $c_1$ e $c_2$ in $\mathbb{R}$. Si osservi che le funzioni $a$ e $b$ possono essere determinate a meno di una costante, dal momento che l'eventuale costante che si somma si può inglobare negli ultimi due termini. Questo significa che nella (13) possiamo sostituire gli integrali definiti con una qualsiasi primitiva (definita in $I$) dell'integranda.

**Esempio 4** Vogliamo trovare la soluzione generale del problema $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$ nell'intervallo $(0, \infty)$. Al solito consideriamo l'omogenea associata, questa è un'equazione a coefficienti costanti, due soluzioni indipendenti sono date da $z_1 = e^t$ e $z_2 = te^t$. Procediamo come sopra per determinare la soluzione particolare. In questo caso $W(s) = z_1 z_2' - z_2 z_1' = e^{2s}$ e quindi

$$a(t) = \int \frac{-\frac{e^s}{s} s e^s}{e^{2s}}\, ds = -t + c$$

mentre

$$b(t) = \int \frac{\frac{e^s}{s} e^s}{e^{2s}}\, ds = log(t) + c$$

e quindi una soluzione particolare è $\overline{y} = a(t)e^t + b(t)te^t = -te^t + tlog(t)e^t$. La soluzione generale è $y(t) = c_1 e^t + c_2 te^t - te^t + t\log(t)e^t$, che si può scrivere, dal momento che $c_1$ e $c_2$ sono due costanti arbitrarie,

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + t\log(t)e^t.$$

**Esercizio 3** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{t} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 4** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = te^t \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

Nel caso di un'equazione differenziale lineare non omogenea di ordine $n$, una soluzione particolare si trova come in (9), in questo caso $u(\cdot, s)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z^n + a_{n-1}(t)z^{n-1} + a_0(t)z = 0 \\ z(s) = 0,\ z'(s) = 0, z''(s) = 0 \dots z^{n-2}(s) = 0, z^{n-1}(s) = 1. \end{cases} \tag{14}$$