Equazioni Differenziali (4)

Esercizio 1 Risolvere il problema di Cauchy $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$, $y(1) = -1$.

Esercizio 2 Risolvere il problema di Cauchy $y' = \frac{2y}{1-x^2} + 1 - x$, $y(0) = 0$.

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy $y' = \frac{y}{x} + xy^2$, $y(1) = 1$.

Data un' equazione differenziale $y' = f(t, y)$, si chiama integrale generale dell'equazione l'insieme di tutte le soluzioni di essa. Il teorema di Cauchy afferma che per ogni punto del dominio di definizione D passa una e una sola soluzione. È interessante prendere in considerazione al variare di una costante c il luogo dei punti $f(t, y) = c$, questo è il luogo dei punti in cui la derivata delle varie soluzioni è costante. Questi luoghi geometrici in generale saranno curve e prendono il nome di isocline. Qualora si riesca, può essere utile disegnare queste curve per capire l'andamento delle soluzioni. Ad esempio l'equazione $y' = t^2 + y^2$ ha le isocline solo nel caso in cui $c \geq 0$ questo sono circonferenze centrate nell'origine di raggio $\sqrt{c}$, mentre per una qualsiasi equazione del tipo $y' = g(\frac{y}{t})$ le isocline sono delle rette passanti per l'origine.

Concludiamo l'argomento riguardante l'equazioni del primo ordine spendendo due parole sulle equazioni scritte non in forma normale, ovvero equazioni differenziali del tipo $F(t, y, y') = 0$. In questo caso le isocline sono date dalle soluzioni di $F(t, y, c) = 0$ al variare di c. A differenza delle equazioni scritte in forma normale, se consideriamo l'integrale generale non è vero che per ogni punto passa una e una sola soluzione, in altre parole può succedere che non ci sia soluzione del problema di Cauchy $F(t, y, y') = 0$, $y(t_0) = y_0$, oppure che ci sia più di una soluzione. Per convincersi di ció basta considerare ad semplice esempio $F(t, y, y') = (y')^2 - y$. In tal caso il problema di Cauchy non può avere soluzione se $y_0 < 0$, questo perché nel punto t_0 avremmo $F(t_0, y(t_0), y'(t_0)) = (y'(t_0))^2 - y_0 > 0$ per qualsiasi valore di $y'(t_0)$. Se invece scegliessimo $y_0 > 0$ allora potremmo trovare due soluzioni del problema di Cauchy date rispettivamente dalle soluzioni dei due problemi $y' = \sqrt{y}$, $y(t_0) = y_0$ e $y' = -\sqrt{y}$, $y(t_0) = y_0$. Ad esempio se $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$ le due soluzioni saranno rispettivamente $y_1(t) = (1 + \frac{t}{2})^2$ e $y_2(t) = (1 - \frac{t}{2})^2$.
Una particolare classe di equazioni non scritte in forma normale sono le equazioni di Clairaut, queste sono del tipo $y = ty' + \phi(y')$ dove ϕ è una funzione reale data. In questo caso possiamo osservare che le isocline sono le rette $y = ct + \phi(c)$, $c \in \mathbb{R}$. In questo caso le isocline sono esse stesse soluzioni

dell'equazione differenziale come si può agevolmente verificare e forniscono una famiglia ad un paramentro di soluzioni. Se vogliamo ottenere altre soluzioni deriviamo l'equazione differenziale ottenendo $y' = y' + ty'' + \phi'(y')y''$ da cui $y''(t + \phi'(y')) = 0$ e quindi a parte le rette che sono soluzioni dell'equazione $y'' = 0$ otteniamo un'altra soluzione che verifica $t + \phi'(y') = 0$ oltre a $y = ty' + \phi(y')$, trattando y' come un parametro p possiamo scrivere la soluzione in forma parametrica $t = -\phi'(p)$, $y = tp + \phi(p)$, se eliminiamo p abbiamo la soluzione $y = y(t)$ che è chiamata soluzione singolare dell'equazione e coincide con l'inviluppo della famiglia di rette, ovvero con una curva che ha in ogni punto la tangente coincidente con una delle rette date.

Esempio 1 Consideriamo la seguente equazione di Clairaut $y = ty' + (y')^2$. Questa ha come soluzioni le rette $y = ct + c^2$ ma anche l'integrale singolare dato da $t = -2c$ e $y = ct + t^2$ ovvero la parabola $y(t) = -\frac{t^2}{4}$. Verificate che la parabola è l'inviluppo della famiglia di rette $y = ct + c^2$.

Un sistema di equazioni differenziali del primo ordine è un'equazione vettoriale del tipo $Y'(t) = G(t, Y(t))$, dove G è una funzione continua nell'insieme aperto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a valori in $\mathbb{R}^n$, $G = (f_1, \cdots, f_n)$. La soluzione è un una n-pla di funzioni $Y = (y_1, \cdots, y_n)$ ognuna delle quali sarà definita su uno stesso intervallo I di $\mathbb{R}$, con $(t, Y(t)) \in D$ per ogni $t \in I$. Si tratta perciò di una curva in $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideriamo un punto $(t_0, Y_0) \in D$, in analogia con il caso scalare chiamiamo problema di Cauchy il seguente

$$\begin{cases} Y' = G(t, Y) \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \tag{1}$$

risolvere (1) equivale a cercare una curva che passa per un determinato punto e che verifica l'equazione differenziale. Vale il seguente risultato analogo al caso scalare

Teorema 1 *Sia $G \in C^1(D)$ allora esiste un'unica soluzione $Y = Y(t)$ del problema di Cauchy definita in un intorno $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.*

L'ipotesi $G \in C^1$ è stata posta solo per semplificare l'enunciato, in realtà come nel caso scalare basta un'ipotesi di esistenza e di equilimitatezza delle derivate parziali della funzione G rispetto alle variabili y_i.
Questo teorema di esistenza ed unicità ci permette di avere un risultato di buona positura per una generica equazione differenziale scalare di ordine n. Supponiamo di avere un'equazione differenziale

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{2}$$

con $f \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. La soluzione y dovrà essere una funzione di classe almeno C^n. Sappiamo che (2) non ammette un'unica soluzione, per individuarne una specifica dobbiamo imporre delle ulteriori condizioni. Ci aspettiamo che il numero delle condizioni cresca al crescere del grado dell'equazione. In analogia con quanto detto nel caso di un equazione di grado 1 e di quanto avete visto per le equazioni lineari a coefficienti costanti di grado 2, scelto un qualsiasi punto $(t_0, y_0, \cdots, y_{n-1}) \in D$ poniamo le seguenti condizioni

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \cdots, y^{n-1}(t_0) = y_{n-1}. \tag{3}$$

Richiediamo quindi che la funzione y con le sue prime $n-1$ derivate sia nota in un fissato t_0. Queste sono esattamente n condizioni. Per dimostrare che l'equazione differenziale (2) con la condizione (3) individua un'unica soluzione utilizziamo il Teorema 1. Sia y una funzione che ammette almeno n derivate in un intervallo I, introduciamo la funzione vettoriale $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$, le cui componenti sono definite da

$$w_1 = y,\; w_2 = y',\; \cdots, w_i = y^{i-1},\; \cdots,\; w_n = y^{n-1}.$$

Allora è facile osservare che y è una soluzione dell'equazione differenziale (2) e condizioni iniziali (3) se e solo se W è soluzione del sistema di primo grado (1) e condizione iniziale $W(t_0) = (y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})$. In questo caso $G(t, w_1, \cdots, w_n) = (w_2, w_3, \cdots, w_n, f(t, w_1, \cdots, w_n))$. Infatti per $1 \leq i \leq n-1$ si ha che

$$w_i' = (y^{(i-1)})' = y^{(i)} = w_{i+1},$$

mentre $w_n' = (y^{n-1})' = y^n = f(t, y, \cdots, y^{n-1}) = f(t, w_1, \cdots, w_n)$. Il Teorema 1 ci assicura che il problema (2)–(3) ammette un' unica soluzione in un intorno di t_0.

Consideriamo il caso $n = 2$, se f non dipende da y ovvero è del tipo $f(t, y')$ possiamo ridurci a studiare un'equazione del primo ordine considerando una nuova incognita $z = y'$ in tal caso l'equazione diventa $z' = f(t, z)$, una volta trovata z la funzione y si ottiene integrando.

Esempio 2 Risolvere il problema di Cauchy $y'' = \frac{t^2}{y'}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. In questo caso consideriamo $z = y'$, quindi il problema diventa $z' = \frac{t^2}{z}$, $z(0) = 1$, questo è a variabili separabili ed ha come soluzione $z(t) = \sqrt{1 + \frac{2}{3}t^2}$ integrando la z e utlizzando l'altra condizione iniziale si ottiene $y(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \frac{2}{3}s^2}\, ds$.

Un altro tipo di equazioni di ordine 2 che si riducono ad equazioni di ordine 1, sono quelle in cui $f = f(y)$. In tal caso, moltiplicando per y' entrambi i membri dell'uguaglianza $y'' = f(y)$, si ottiene $\left(\frac{(y')^2}{2} - F(y)\right)' = 0$, dove F è una qualsiasi primitiva della funzione f. Quindi

$$\frac{(y')^2}{2} - F(y) = c \tag{4}$$

dove c è una costante che si determina attraverso le condizioni iniziali. A questo punto abbiamo un'equazione di ordine 1. Si osservi come l'equazione (4) abbia una facile interpretazione nel contesto della meccanica.
Ad esempio se interpretiamo l'equazione $y'' = f(t, y, y')$ come la legge di Newton per il moto di una particella sottoposta ad una forza f, troviamo quindi che, nota al tempo t_0 la posizione della particella $y(t_0)$ e la sua velocità $y'(t_0)$, l'equazione differenziale ci permette di individuare il moto della particella.

Lasciamo questo contesto generale e cominciamo ad occuparci in modo più sistematico di equazioni differenziali lineari. Un' equazione differenziale lineare omogenea di ordine n è del tipo

$$y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \tag{5}$$

dove i coefficienti a_i sono funzioni definite su un intervallo comune $I \subset \mathbb{R}$. Sappiamo, da quanto detto sopra, che imponendo in un punto t_0 la condizione (3) esiste localmente un'unica soluzione. In realtà nel caso lineare si può provare che la soluzione esiste in tutto I.
Inoltre nel caso lineare è possibile capire come è strutturata la soluzione generale dell'equazione differenziale. Indichiamo con L l'operatore che associa ad una funzione $f \in C^n(I)$ la quantità

$$L(f) = f^{(n)} + a_{n-1}(t)f^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)f.$$

È facile osservare (verificate!) che l'operatore L è lineare, ovvero date due qualsiasi costanti c_1 e c_2 e due funzioni f_1 ed f_2 si ha $L(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1L(f_1) + c_2L(f_2)$. Dire che $y(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale (5) è equivalente a dire che $L(y) \equiv 0$. Perciò dalla linearità dell'operatore L segue subito che, date y_1 e y_2 soluzioni dell'equazione differenziale, una qualsiasi combinazione lineare di queste sarà ancora soluzione. In generale sarà vero che date m soluzioni una combinazione lineare di queste rimarrà soluzione. Il nostro scopo è far vedere che una qualsiasi soluzione si può scrivere come combinazione lineare di un certo numero di soluzioni trovate. Ci chiediamo quante soluzioni sarà necessario determinare per scrivere tutte le altre?

Come ci aspettiamo la risposta è n. Prima di vedere questo introduciamo il concetto di dipendenza lineare per funzioni.

Definizione 1 *Consideriamo m funzioni $f_1, \cdots, f_m$ definite in un intervallo I. Queste si dicono linearmente dipendenti in I se esisono m costanti $c_1, \cdots, c_m$ non tutte nulle tali che $\sum_1^m c_i f_i(t) = 0$ per ogni $t \in I$. Se le funzioni f_i non sono linearmente dipendenti si dicono linearmente indipendenti.*

Per vedere se delle funzioni regolari sono linearmente dipendenti si usa il seguente risultato

Proposizione 1 *Siano $f_1, \cdots, f_m \in C^{m-1}(I)$ linearmente dipendenti allora la seguente matrice quadrata $m \times m$*

$$\left(\begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_m' \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f_1^{m-1} & f_2^{m-1} & \cdots & f_m^{m-1} \end{array} \right) \tag{6}$$

ha determinante identicamente nullo. Il determinante della matrice (6), che in genere è una funzione di t, si chiama Wronskiano e si indica con $W(t)$.

Dimostrazione. Supponiamo che esistano delle costanti non tutte nulle $c_1, \cdots, c_m$ tali che $\sum_1^m c_i f_i(t) \equiv 0$ in I. Allora possiamo derivare questa uguaglianza e otteniamo che $\sum_1^m c_i f_i'(t) \equiv 0$. Possiamo continuare a derivare fino all'ordine $m-1$ e otteniamo che la derivata è sempre identicamente nulla. In altre parole per ogni $t \in I$ le costanti c_i verificano il seguente sistema lineare omogeneo

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^m c_i f_i(t) = 0 \\ \sum_1^m c_i f_i'(t) = 0 \\ \cdots \\ \sum_1^m c_i f_i^{m-1}(t) = 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

Dall'algebra lineare sappiamo che un sistema omogeneo di m equazioni in m incognite ha una soluzione $(c_1, \cdots, c_m)$ non nulla se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti, quindi la matrice (6), è nullo. Siccome questo deve essere vero per ogni $t \in I$ segue la tesi.

Esercizio 4 Verificare che le funzioni $e^{\alpha t}$ e $e^{\beta t}$ sono linearmente indipendenti se $\alpha \neq \beta$.

Esercizio 5 Verificare che le funzioni $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$ sono linearmente indipendenti per ogni $\alpha \neq 0$.

Una volta data questa definizione ci aspettiamo che le n soluzioni attraverso cui vogliamo scrivere tutte le altre siano linearmente indipendenti. Come possiamo scegliere n soluzioni linearmente indipendenti? Fissato $t_0 \in I$, per ogni $0 \leq i \leq n-1$ indichiamo con y_i la soluzione del problema (3)–(5) di dato iniziale

$$y^j(t_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ 1 & \text{se } j = i. \end{cases}$$

Osserviamo che le n funzioni y_i sono linearmente indipendenti. Infatti la matrice (6) relativa ad esse in t_0 è la matrice identità e quindi $W(t_0) = 1 \neq 0$. Potevamo scegliere le n funzioni linearmente indipendenti anche in altro modo, bastava che i loro dati iniziali fossero indipendenti tra loro.
Ora consideriamo una qualsiasi $y(t)$ soluzione dell'equazione differenziale (5). Questa verificherà delle opportune condizioni in t_0, $y(t_0) = \overline{y}_0$, $y'(t_0) = \overline{y}_1 \cdots$, $y^{n-1}(t_0) = \overline{y}_{n-1}$. Se consideriamo la funzione $w(t) = \sum_{i=1}^n \overline{y}_i y_i(t)$ osserviamo che questa, essendo combinazione lineare di soluzioni, è ancora soluzione dell'equazione differenziale ed inoltre verifica le stesse condizioni iniziali della funzione $y(t)$. Il teorema di unicità ci assicura che $y(t)$ coincide con $w(t)$ e quindi si scrive come combinazione lineare delle funzioni y_i. Dal momento che la funzione $y(t)$ è stata scelta in modo arbitrario abbiamo che

Proposizione 2 *Ogni soluzione dell'equazione lineare omogenea (5) si scrive come combinazione lineare di n soluzioni linearmente indipendenti. Perciò le soluzioni di un' equazione lineare omegenea formano uno spazio vettoriale di ordine n.*

Per avere tutte le soluzioni basta trovarne n linearmente indipendenti. Nel caso lineare a coefficienti costanti ($c_i(t) \equiv c_i \in \mathbb{R}$) c'è un modo standard per trovare le n soluzioni. Si cerca la soluzione della forma $e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ e si ottiene sostituendo nell'equazione (3)

$$e^{\lambda t}(\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0) = 0,$$

quindi se λ_0 è una soluzione dell'equazione $\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$, allora la parte reale e la parte immaginaria della funzione $e^{\lambda_0 t}$ sono soluzioni dell'equazione differenziale. Sappiamo dal teorema fondamentale dell'algebra, che un polinomio di ordine n ha esattamente n soluzioni contate con la loro molteplicità. Se il polinomio ha n radici distinte abbiamo già n soluzioni linearmente indipendenti, se invece questo ha una radice λ_0 di molteplicità m si può verificare che questa fornisce $2m$ soluzioni $\mathrm{Re}(e^{\lambda_0 t})$, $\mathrm{Im}(e^{\lambda_0 t})$, $\mathrm{Re}(te^{\lambda_0 t})$, $\mathrm{Im}(te^{\lambda_0 t})$, $\cdots$, $\mathrm{Re}(t^{m-1}e^{\lambda_0 t})$, $\mathrm{Im}(t^{m-1}e^{\lambda_0 t})$. Queste sono coincidenti a due a due se λ_0 è reale e forniscono m soluzioni linearmente indipendenti, mentre forniscono $2m$ soluzioni linearmente indipendenti se λ_0 ha parte immaginaria non nulla. Riassumiamo e scriviamo in modo esplicito le soluzioni:

- se λ_0 è reale di molteplicità m, abbiamo m soluzioni indipendenti $y_1(t) = e^{\lambda_0 t}$, $y_2(t) = te^{\lambda_0 t}$, $\cdots$, $y_m(t) = t^{m-1}e^{\lambda_0 t}$.

- Se $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$ è una radice di ordine m anche la complessa coniugata $\overline{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ è una radice di ordine m, queste forniscono $2m$ soluzioni
  $y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $y_3(t) = te^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $y_4(t) = te^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $\cdots$, $y_{2m-1} = t^{m-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $y_{2m}(t) = t^{m-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)$.

Esempio 3 Vogliamo scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $y''' - y' = 0$. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione $\lambda^3 - \lambda = 0$, queste sono date da $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. In questo caso sono tutte reali e distinte. Queste forniscono tre soluzioni $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = e^{0t} = 1$, $y_3(t) = e^t$. La soluzione generale è data dalla combinazione lineare $c_1e^{-t} + c_2 + c_3e^t$

Esempio 4 Vogliamo scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$, queste sono date da $\lambda_1 = -2i$, $\lambda_2 = -2i$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = 2i$. Quindi si tratta di soluzioni complesse coniugate di molteplicità 2. Abbiamo 4 soluzioni $y_1(t) = \cos(2t)$, $y_2(t) = \sin(2t)$, $y_3(t) = t\cos(2t)$, $y_4(t) = t\sin(2t)$,. La soluzione generale è data dalla combinazione lineare $c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)c_3t\cos(2t) + c_4t\sin(2t)$.

In entrambi gli esempi se vogliamo determinare una soluzione particolare dovremmo imporre delle condizioni in un punto t_0. Nel primo caso dobbiamo dire quanto vale la funzione y e le sue prime 2 derivate in t_0, mentre nel secondo caso ci serve anche di sapere quanto vale la derivata terza. Con queste condizioni si determinano le costanti c_i in modo unico.