Equazioni Differenziali (3)

Abbiamo visto il metodo per risolvere equazioni differenziali a variabili separabili, ora vediamo come in certi casi è possibile ricondursi a questo tipo di equazioni tramite un cambio di variabile.
Equazioni del tipo $y' = g(\frac{y}{t})$ dove g è una opportuna funzione regolare di una variabile reale. Ad esempio $y' = e^{\frac{y}{t}}$, $y' = \frac{y+t}{y-t}$, $y' = \sin(\frac{t^2}{y^2})$ e così via. Per queste equazioni si cerca una soluzione del tipo $z(t) = \frac{y(t)}{t}$, in questo modo si aggiunge una singolarità per $t = 0$ che a priori potrebbe non esserci, ad esempio negli esempi 2 e 3 di sopra. In ogni caso questo metodo funziona bene se non consideriamo i punti $t = 0$, poi a posteriori possiamo accorgerci che in alcuni casi la soluzione ottenuta è valida anche in tali punti.
Con questo cambio di variabile l'equazione iniziale diventa a variabili separabili, infatti $z + tz' = (tz)' = y' = g(z)$ da cui $z' = \frac{g(z)-z}{t}$. Trovate le soluzioni di questa nuova equazione con il metodo di separazione delle variabili poi si può tornare alla funzione $y(t) = tz(t)$. Un problema di Cauchy con dato iniziale $y(t_0) = y_0$ diventa un problema di Cauchy per z con dato iniziale $z(t_0) = z_0 = \frac{y_0}{t_0}$.

Esempio 1 Risolvere il problema di Cauchy $y' = \frac{y^2}{t^2+ty}$, $y(1) = 2$.
Questo è un esempio di equazione differenziale del tipo considerato sopra con $g(s) = \frac{s^2}{1+s}$, l'equazione per $z = \frac{y}{t}$ diventa $z' = \frac{g(z)-z}{t} = \frac{z}{(1+z)t}$, $z(1) = \frac{y(1)}{1} = 2$, questa la risolviamo dividendo per $\frac{1+z}{z}$ e considerando la primitiva di entrambi i membri in tal modo otteniamo

$$\log|z| + z = \log|t| + c,$$

dal momento che la studiamo in un intorno del punto $(t_0, z_0) = (1, 2)$ possiamo togliere entrambi moduli, imponendo la condizione iniziale otteniamo $\log 2 + 2 = c$ e quindi la curva è data implicitamente tramite l'equazione $\log z + z = \log t + \log 2 + 2$, tornando alla funzione y che ci interessa avremo

$$\log(\frac{y}{t}) + \frac{y}{t} = \log t + \log 2 + 2$$

o anche $\log(y) + \frac{y}{t} - 2\log t - \log 2 - 2 = 0$, questa equazione ci fornisce in modo implicito la soluzione desiderata.

Equazioni del tipo $y' = g(at+by+c)$ dove g è una opportuna funzione regolare di una variabile reale. Ad esempio $y' = \cos(t - y + 2)$, $y' =$

$(t+y)^3 - t - y$. In questo caso si cerca una soluzione attraverso la funzione $z(t) = at + by(t) + c$, si ottiene $z' = a + by' = a + bg(z)$, ovvero un' equazione autonoma (e quindi a variabili separabili) per z. Se si determina z allora si trova anche y. Un problema di Cauchy di dato iniziale $y(t_0) = y_0$ diventa per la funzione z del tipo $z(t_0) = at_0 + by_0 + c$.

Esempio 2 Risolvere il problema di Cauchy $y' = (t+y)^2$, $y(0) = 0$.
Questo è un esempio di equazione differenziale come sopra con $g(s) = s^2$, l'equazione per $z = t+y$ diventa $z' = 1+z^2$, $z(0) = 0$. Utilizzando il metodo delle variabili separabili otteniamo

$$\arctan z = t + c,$$

imponendo la condizione iniziale troviamo $c = 0$, in questo caso possiamo trovare z esplicitamente infatti $z(t) = \tan(t)$ e quindi $y(t) = z(t) - t = \tan(t) - t$, osserviamo che la soluzione è definita nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Con il metodo della separazione delle variabili si ritrova subito la soluzione del problema lineare omogeneo del primo ordine $y' = a(t)y$, procedendo si ottiene

$$|y(t)| = ke^{A(t)}$$

dove k è una costante positiva e $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$, questo significa che tutte le soluzioni si possono scrivere come $y(t) = ce^{A(t)}$ con c costante reale. La soluzione del problema di Cauchy di dato iniziale $y(t_0) = y_0$ si trova o sostituendo e trovando la costante c nell'uguaglianza di sopra, oppure utilizzando direttamente la formula risolutiva che si ottiene considerando l'integrale definito tra t_0 e t nel metodo di separazione delle variabili, questa è data da

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}.$$

Ora consideriamo un problema lineare non omogeneo del primo ordine del tipo $y' = a(t)y + b(t)$. Un modo per ricercare la soluzione consiste nel metodo della variazione delle costanti. L'idea di questo metodo è la seguente; il problema omogeneo $y' = a(t)y$ ha come soluzioni tutte quelle del tipo $cz(x)$ dove z è una qualsiasi soluzione non nulla, in particolare questa si trova del tipo $e^{A(t)}$, con A primitiva di a. Ora cerchiamo la soluzione del problema non omogeneo del tipo $y(t) = c(t)z(t)$, dove c è una funzione (una costante che varia con il tempo!) e z è una soluzione del problema omogeneo. Imponendo che $y(t)$ sia soluzione del problema non omogeneo si ottiene che $y'(t) = c'(t)z(t) + c(t)z'(t) = c'(t)z(t) + c(t)a(t)z(t)$ deve essere uguale a

$a(t)y(t) + b(t) = a(t)c(t)z(t) + b(t)$ e quindi deve essere $c'(t)z(t) = b(t)$ da cui si ricava la funzione c dividendo per z ed integrando si ha

$$c(t) = \int \frac{b(t)}{z(t)}\, dt + k$$

dove k è una qualsiasi costante reale e il primo termine a secondo membro rappresenta una primitiva di $\frac{b(t)}{z(t)}$. Questo significa che la soluzione del problema lineare non omogeneo si scrive

$$y(t) = c(t)z(t) = kz(t) + z(t) \int \frac{b(t)}{z(t)}\, dt \qquad \text{con } k \in \mathbb{R},$$

ricordiamoci che z è una soluzione del problema omogeneo quindi $z(t) = e^{\int a(t)\, dt}$. Si osservi che tutti gli integrali che compaiono sopra sono indefiniti quindi sono funzioni determinate a meno di una costante, per trovare la soluzione basta scegliere una primitiva qualsiasi. Utilizzando gli integrali definiti è possibile scrivere direttamente la soluzione del problema di Cauchy di dato iniziale $y(t_0) = y_0$ questa è data da

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} + e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\, d\tau} b(s)\, ds.$$

Un tipo di equazioni riconducibili a quelle lineari sono le **equazioni di Bernulli**, queste sono del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)y^{\alpha},$$

dove α è una qualsiasi costante reale diversa da 0 e 1 (in questi casi l'equazione differenziale è già lineare). Si osservi che a meno di considerare degli α particolari (ad esempio i numeri naturali) tali equazioni saranno definite solo per $y > 0$. Queste equazioni si riducono ad equazioni lineari per la funzione $z = y^{1-\alpha}$, infatti

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)y^{-\alpha}(a(t)y + b(t)y^{\alpha}) = (1-\alpha)(a(t)z + b(t)),$$

quindi un' equazione lineare per z, una volta ottenuta z si trova $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Esempio 3 Si vuole risolvere il problema di Cauchy $y' = \frac{4}{t}y + t\sqrt{y}$, $y(1) = 1$. Questa equazione differenziale è di Bernulli con $\alpha = \frac{1}{2}$, quindi consideriamo $z = \sqrt{y}$, il problema di Cauchy diventa $z' = \frac{2}{t}y + \frac{t}{2}$, $z(1) = 1$, essendo un equazione differenziale lineare procediamo come detto sopra. Prima determiniamo una soluzione del problema omogeneo come $e^{A(t)}$, dove

A è una primitiva di $\frac{2}{t}$, quindi ad esempio $A(t) = \log t^2$, una soluzione del problema omogeneo è quindi t^2, tutte le soluzioni del problema non omogeneo sono del tipo

$$z(t) = t^2 \left(c + \int \frac{t}{2t^2}\, dt \right) = ct^2 + \frac{t^2}{2} \log t,$$

dove c è una costante reale che si determina imponendo la condizione iniziale, essendo $z(1) = 1$ si trova che $c = 1$. Dal momento che $y = z^2$, si ha $y(t) = t^4(1 + \frac{1}{2}\log t)^2$.

Esercizio 1 Si risolva il problema di Cauchy $y' = y \tan t + \cos t$, $y(0) = 0$.

Esercizio 2 Si risolva il problema di Cauchy $y' = \frac{2}{t} y + t^4$, $y(1) = 1$.