Equazioni Differenziali 2

Dato $f \in C(D)$, e $(t_0, y_0) \in D$, consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Per esso vale il seguente risultato

Teorema 1 *Supponiamo che la funzione f ammetta in un intorno $R := [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset D$ derivata parziale rispetto ad y e che questa sia limitata in tale intorno, ovvero esista una costante M tale che*

$$|f_y(t, y)| \leq M \qquad \textit{per ogni } (t, y) \in R,$$

allora esiste un'unica soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy definita in un intorno $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [t_0 - a, t_0 + a]$.

Prima osservazione: affinché sia verificata l'ipotesi del Teorema è sufficiente che sia $f \in C^1(D)$. Infatti il teorema di Weierstrass assicura che una funzione continua è sempre limitata sugli insiemi chiusi e limitati. Perciò se le derivate parziali sono continue l'ipotesi è verificata (in realtà basta che sia continua f_y).
Seconda osservazione: nel caso lineare per determinare un'unica soluzione si imponeva una condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, il precedente teorema mostra che questo vale più in generale.
Terza osservazione: il teorema asserisce solo che la soluzione esiste localmente, ovviamente possiamo sempre pensare di prolungare la soluzione. Infatti se il punto $(t_0 + \delta, y(t_0 + \delta)) =: (t_1, y_1)$ si trova in D possiamo considerare il problema di Cauchy di dato iniziale $y(t_1) = y_1$ e quindi andare avanti. D'altra parte è possibile che il punto (t_1, y_1) appartenga alla frontiera di D e in tal caso l'equazione differeziale perderebbe di significato. Ma anche se D fosse uguale a tutto $\mathbb{R}^2$ potrebbe accadere che la soluzione $y(t)$ tenda $+\infty$ o a $-\infty$ per t che tende a $t_0 + \delta$ e anche in questo caso la soluzione non potrebbe essere prolungata. Questo è un fenomeno che non accadeva per l'equazioni differenziali lineari.
Quarta osservazione: il risultato di unicità ci assicura che date due distinte curve che verificano l'equazione differenziale queste non possono mai intersecarsi. Infatti se si intersecassero in un punto $P = (t_0, y_0) \in D$ arriveremmo ad un assurdo considerando il problema di Cauchy di dato iniziale $y(t_0) = y_0$.
Ultima osservazione: se non è verificata l'ipotesi di limitatezza di f_y potrebbe non esserci unicità. Infatti se prendiamo $f(t, y) = \sqrt{|y|}$ e imponiamo la condizione $y(0) = 0$ osserviamo che $y(t) \equiv 0$ è soluzione ma anche $y(t) = \frac{t^2}{4}$ è

soluzione per $t \geq 0$. Nel caso in cui l'equazione è a variabili separabili, ovvero $f(t, y) = h(y)a(t)$, affinché siano verificate le ipotesi del Teorema precedente è sufficiente che sia a continua in un certo intervallo I e h derivabile in un certo intervallo J allora per ogni $(t_0, y_0) \in I \times J$ valgono i risultati di esistenza ed unicità. Abbiamo già visto come si risolve un'equazione a variabili separabili, se vogliamo ottenere la soluzione del problema di Cauchy si può procedere nel seguente modo. Se y_0 è uno zero di h allora la soluzione è quella banale $y(t) \equiv y_0$, altrimenti dividiamo per $h(y)$ l'equazione differenziale e facciamo l'integrale definito di ambo i membri tra t_0 e t, allora si ottiene

$$A(t) - A(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\, dt = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(y)}\, dy = B(y) - B(y_0)$$

dove con A e B abbiamo indicato due primitive rispettivamente di a e h, quindi $y(t) = B^{-1}(A(t) + B(y_0) - A(t_0))$. Con questo procedimento si ottiene direttamente la soluzione del problema di Cauchy, comunque si può procedere come abbiamo detto la volta scorsa considerando gli integrali indefiniti e portando dietro una costante c che si determina alla fine imponendo le condizioni iniziali.

Come esempio risolviamo l'equazione differenziale $y' = y(1 - y)$, in questo caso $a(t) = 1$ e quindi $A(t) = t + c$, mentre

$$B(y) = \int \frac{1}{y(1-y)}\, dy = \int \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\, dy = \log|y| - \log|1-y|.$$

Quindi la soluzione generale è determinata dalla relazione implicita

$$\log\left|\frac{y}{1-y}\right| = t + c \qquad c \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Per determinare in modo più preciso le soluzioni dobbiamo decidere in che striscia le cerchiamo. Come abbiamo visto ci sono tre possibilità $y < 0$, $0 < y < 1$ e $y > 1$. Consideriamo il caso $0 < y < 1$ allora la (2) diventa $\log\left(\frac{y}{1-y}\right) = t + c$ applicando l'esponenziale ad entrambi i membri e semplificando otteniamo

$$y(t) = \frac{ke^t}{1 + ke^t},$$

dove $k = e^c$ è una costante positiva. La soluzione, come avevamo già visto da uno studio qualitativo, è compresa tra 0 e 1 è crescente ed ha asintoti orizzontali rispettivamente uguali a 0 e 1 in $-\infty$ e in $+\infty$. Determiniamo una soluzione particolare imponendo la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{2}$. In tal

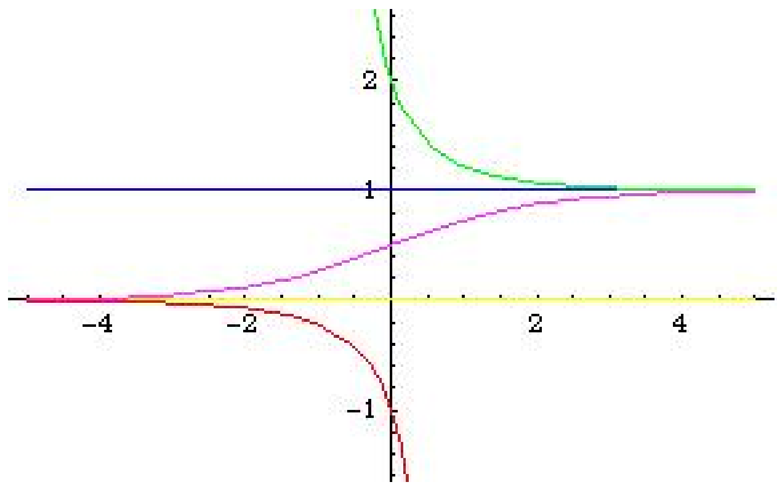

Figura 1: grafici delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y(1 - y)$ di dati iniziali $y(0) = -1$, $y(0) = 0$ $y(0) = \frac{1}{2}$, $y(0) = 1$, $y(0) = 2$.

caso dovrà essere $\frac{1}{2} = \frac{k}{k+1}$ da cui deduciamo $k = 1$ e quindi la souzione è data da $y(t) = \frac{e^t}{e^t+1}$. Consideriamo ora i casi $y > 1$ e $y < 0$, la soluzione è determinata data $\log\left(\frac{y}{y-1}\right) = t + c$ e quindi

$$y(t) = \frac{ke^t}{ke^t - 1},$$

osserviamo che queste soluzioni non sono definite su tutto $\mathbb{R}$ infatti nel punto $t = \log(\frac{1}{k})$ il denominatore si annulla e la funzione perde di significato. Si può vedere che nella striscia $y > 1$ la soluzione è definita nell'intervallo $(\log(\frac{1}{k}), +\infty,)$ mentre nella striscia $y < 0$ la soluzione è definita nell'intervallo $(-\infty, \log(\frac{1}{k})$. Per vedere meglio questo fatto consideriamo una soluzione specifica definita tramite il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(1 - y) \\ y(0) = 2, \end{cases} \tag{3}$$

Per quanto detto la soluzione di (3) è del tipo $y(t) = \frac{ke^t}{ke^t-1}$, determiniamo la costante k tramite la condizione iniziale, avremo $2 = \frac{k}{k-1}$ e quindi $k = 2$ la soluzione $y(t) = \frac{2e^t}{2e^t-1}$. Questa è definita nell'intervallo $(-\log(2), +\infty)$. Se consideriamo il problema di Cauchy di dato iniziale $y(0) = -1$ la soluzione sarà ancora del tipo $y(t) = \frac{ke^t}{ke^t-1}$ e la costante è determinata in questo caso dalla relazione $-1 = \frac{k}{k-1}$ e quindi $k = \frac{1}{2}$ la soluzione è data da $y(t) = \frac{e^t}{e^t-2}$ che è definita nell'intervallo $(-\infty, \log(2))$.

Esercizio 1 Descrivere in generale le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y^2 e^t$. In particolare determinare le soluzioni dei problema di Cauchy di dati iniziali rispettivamente $y(0) = 0$, $y(0) = 1$ e $y(0) = -1$.

Esercizio 2 Si risolva il problema di Cauchy $y'(t) = \frac{t}{y^2}$, $y(0) = 1$. Fare attenzione al dominio di definizione della funzione $f(t, y)$.

Esercizio 3 Ritrovare, utilizzando il metodo di separazione delle variabili, la soluzione generale dell' equazione lineare omogenea $y' = a(t)y$.

Esercizio 4 Determinare come deve essere fatta la funzione $k(t)$ in modo tale che la funzione $y(t) = k(t)e^{A(t)}$ sia soluzione del equazione lineare non omogenea $y' = a(t)y + b(t)$. ($A(t)$ al solito rappresenta una primitiva della funzione $a(t)$). Con questo metodo detto "della variazione delle costanti" si ritrova la soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea.

Esercizio 5 Si risolva il problema di Cauchy $y'(t) = \frac{2}{t}y + t^4$, $y(1) = 1$.

Esercizio 6 Si risolva il problema di Cauchy $y'(t) = \frac{e^t}{(e^t+1)y}$, $y(0) = 1$.

Esercizio 7 Si risolva il problema di Cauchy $y'(t) = \frac{y \log y}{\sin(t)}$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.