Equazioni Differenziali

Un' equazione differenziale di ordine m è un' equazione del tipo

$$F(t, y(t), y'(t), \cdots, y^n(t)) = 0$$

dove F è una funzione continua definita su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{m+2}$. L'incognita del problema è una funzione $y(t)$. Si osservi che l'equazione di sopra coinvolge la funzione y e le sue prime m derivate.
Questo tipo di problemi hanno notevoli applicazioni in vari campi della matematica e della fisica. Ad esempio se si pensa ad una particella di massa m che si muove su una retta e sottoposta ad una forza f dipendente dal tempo t dalla posizione $y(t)$ e dalla velocità $y'(t)$, allora la seconda legge di Newton si scrive tramite la seguente equazione differenziale

$$my'' = f(t, y, y').$$

Un tipo di equazioni che avete già incontrato sono le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo e del secondo ordine, cioè delle equazioni del tipo

$$y'(t) = Ay(t), \qquad y''(t) + ay'(t) + by(t) + c = 0;$$

le prime hanno delle applicazioni nel calcolo del tasso d'interesse mentre le seconde si studiano ad esempio nei circuiti elettrici (vedi Courant John vol I). In tal caso le soluzioni si trovano in modo esplicito, queste sono definite per ogni t reale e non sono uniche, infatti le soluzioni dell'equazioni del primo ordine dipendono da un parametro mentre le soluzioni dell'equazioni del secondo ordine dipendono da due parametri. Per determinare in modo unico la soluzione è necessario imporre delle condizioni iniziali. Lo stesso problema si presenta ovviamente se si studiano equazioni del primo o del secondo ordine più generali.

Oltre a queste equazioni differenziali scalari possiamo pensare a sistemi di n equazioni differenziali di ordine m, in questo caso l'incognita del problema è data da una curva $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t))$ di $\mathbb{R}^n$ e la F è una funzione vettoriale definita in un dominio $D \subset \mathbb{R}^{2+nm}$ a valori in $\mathbb{R}^n$, in altre parole si cerca una n-pla di funzioni Y (una funzione vettoriale) che soddisfa $F(t, Y(t), Y'(t), \cdots, Y^m(t)) = (0, 0 \cdots, 0)$. Se $F = (F_1, \cdot, F_n)$ l'equazione di sopra si può anche riscrivere come un sistema di n equazioni scalari

$$\begin{cases} F_1(t, Y(t), Y'(t), \cdots, Y^m(t)) = 0 \\ F_2(t, Y(t), Y'(t), \cdots, Y^m(t)) = 0 \\ \cdots \\ F_n(t, Y(t), Y'(t), \cdots, Y^m(t)) = 0. \end{cases}$$

Il sistema si dice in forma normale se è possibile esplicitare rispetto alle derivate di ordine massimo, in altre parole se per ogni i si ha

$$F_i(t, Y(t), Y'(t), \cdots, Y^m(t)) = y_i^m - f_i(t, Y(t), Y'(t), \cdots, Y^{m-1}(t)),$$

dove le funzioni h_i dipendono solo dalle prime $m-1$ derivate.

Un esempio interessante si ha nel caso $m = 2$ e $n = 3$, se il sistema è in forma normale si ha

$$\begin{cases} y_1'' = f_1(t, Y(t), Y'(t)) \\ y_2'' = f_2(t, Y(t), Y'(t)) \\ y_3'' = f_2(t, Y(t), Y'(t)). \end{cases}$$

La soluzione $Y = (y_1, y_2, y_3)$ si può interpretare come la curva del moto di una particella di massa costante uguale ad 1 sottoposta ad una forza $F = (f_1, f_2, f_3)$ dipendente solo dal tempo dalla posizione della particella e dalla sua velocità.

Consideriamo per ora il caso di un equazione differenziale scalare del primo ordine (n=1,m=1). Supponiamo che questa si scriva in forma normale $y'(t) = f(t, y(t))$, dove f è una funzione continua su un insieme aperto $D \subset \mathbb{R}^2$. In molti casi sottintenderemo la dipendenza da t per la funzione incognita y e per la sua derivata y'. Sia $(t_0, y_0) \in D$, vogliamo determinare una soluzione del problema

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

questo è noto come Problema di Cauchy.

Vediamo un primo caso molto semplice in cui f non dipende da y, allora $f(t, y) = f(t)$ l'equazione differenziale si risolve semplicemente integrando l'equazione differenziale tra t_0 e il generico t si avrà

$$\int_{t_0}^{t} y'(s)\, ds = y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds.$$

Perció si ottiene la soluzione semplicemente travando una primitiva di f, ovviamente non è detto che ció si possa fare in modo esplicito.
Ora nel caso in cui f dipenda anche da y possiamo comunque integrare l'equazione tra t_0 e t avremo

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds. \tag{2}$$

È facile osservare che y è soluzione del problema di Cauchy (1) se e solo se soddisfa (2). L' equazione (2) ci fornisce solo un altro modo per scrivere il problema di Cauchy ma non ci dà affatto una soluzione esplicita, è una scrittura implicita della soluzione, anche se come vedremo nella dimostrazione del Teorema di Cauchy è molto utile per la dimostrazione stessa.

In generale non possiamo sperare di risolvere un qualsiasi problema di Cauchy in modo esplicito, ci sono delle situazioni in cui è possibile trovare la soluzione ed altri casi in cui non si riesce a determinarla esplicitamente ma si riesce comunque a capire come è fatta.

Cominciamo a considerare il caso autonomo in cui la funzione f dipende solo dalla variabile y. Supponiamo che sia $f(y)$ una funzione C^1 nel suo dominio di definizione, si può dimostrare (Teorema di Cauchy che vedremo) che vale un risultato di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy (1). Vediamo come sono fatte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(y)$. Osserviamo che se $\overline{y}$ è uno zero della funzione f, allora $y(t) \equiv \overline{y}$ è una soluzione costante dell'equazione differenziale. Siccome vale un risultato di unicità ogni altra soluzione dell'equazione differenziale non può intersecare questa costante $\overline{y}$ altrimenti se considerassimo un problema di Cauchy nel punto d'intersezione arriveremmo ad un assurdo. Quindi data la soluzione del problema di Cauchy di dato iniziale $y(t_0) = y_0$ siamo sicuri che se $y_0 < \overline{y}$ allora la soluzione rimane sempre minore di $\overline{y}$, mentre se $y_0 > \overline{y}$ la soluzione è sempre maggiore di $\overline{y}$. Se sappiamo studiare la disequazione $f(y) > 0$ possiamo disegnare sul piano (t, y) le regioni in cui la soluzione ha derivata positiva e quelle in cui ha derivata negativa. Queste regioni saranno delle strisce, delimitate dalle rette $y = y_k$ dove y_k sono gli zeri della funzione f. Cerchiamo di capire meglio come funzionano le cose nel caso autonomo con un esempio.

Esempio 1 Sia $f(y) = y(1 - y)$, in tal caso abbiamo due soluzioni costanti $y \equiv 0$ e $y \equiv 1$, nelle regioni $y > 1$ e $y < 0$ la derivata sarà decrescente mentre nella regione $0 < y < 1$ la derivata sarà crescente (vedi figura 1). Questo significa che se partiamo da un dato che si trova nella striscia $0 < y < 1$ la soluzione rimarrà in tale striscia, sarà crescente e quindi ammetterà limite per t tendente a $+\infty$ e $-\infty$. Quindi avrà asintoto orizzontale a $\pm\infty$. Osserviamo che l'asintoto a $+\infty$ deve essere necessariamente $y = 1$. Infatti supponiamo che $\lim_{t\to\infty} y(t) = L$. Dal momento che y è crescente dovrà essere $L \in (0, 1]$, se $L \neq 1$ si avrebbe, utilizzando l'equazione differenziale, $\lim_{t\to\infty} y'(t) = L(1 - L) > 0$ e questo contraddice il fatto che ci sia un asintoto. Ragionando in modo analogo si prova che la retta $y = 0$ è asintoto a $-\infty$ per la soluzione. Consideriamo ora un dato iniziale preso nella striscia

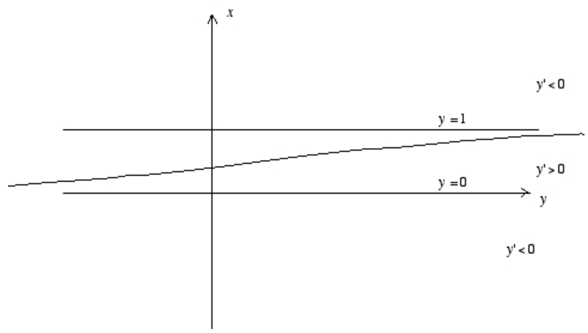

Figura 1:

$y > 1$, in questo caso la soluzione rimarrà nella regione $y > 1$ e sarà decrescente. Ragionando come sopra, possiamo dimostrare che la soluzione ha un asintoto orizzontale per t tendente a $+\infty$. La situazione è diversa nell'altra direzione, prima cosa non è detto che la soluzione esista in $\mathbb{R}$, (vedremo che effettivamente non esiste in tutto l'intervallo) infatti potrebbe tendere a $+\infty$ per un certo valore di t e quindi avere un asintoto verticale oppure potrebbe esistere in tutto $\mathbb{R}$ e in tal caso il suo limite per t tendente a $-\infty$ potrebbe essere finito oppure infinito. Possiamo usare un' analisi qualitativa che sfrutta la struttura dell'equazione come nel caso precedente per escludere che qualora la soluzione sia definita in tutto $\mathbb{R}$, (non lo è ma ancora non lo sappiamo) questa ammetta asintoto orizzontale a $-\infty$. Infatti, supponendo per assurdo che $y = L$ sia l'asintoto, dovrà essere necessariamente $L > 1$, avremo quindi che $\lim_{t\to\infty} y'(t) = L(1-L) < 0$ e quindi la soluzione non può avere asintoto orizzontale. Ragionando in modo simile nella regione $y < 0$, possiamo dire che se il dato si trova in questa striscia la soluzione rimarrà nella stessa striscia, inoltre la soluzione sarà decrescente e ammetterà asintoto orizzontale uguale a $y = 0$ per $-\infty$ mentre non ammetterà sicuramente asintoto orizzontale per t tendente a $+\infty$.

L'esempio precedente mostra come si possa avere informazioni su una soluzione di un equazione differenziale pur non risolvendola esplicitamente. In realtà nel caso di un equazione differenziale in cui la funzione $f(t, y)$ è del tipo $h(y)a(t)$ esiste un metodo detto di separazione delle variabili che permette di esplicitare in qualche modo la soluzione. Prima di procedere osserviamo che il caso autonomo rientra in questo con $a(t) \equiv 1$. Se $\overline{y}$ è uno zero della funzione h allora come nel caso autonomo la funzione $y(t) \equiv \overline{y}$ sarà una soluzione dell'equazione differenziale. Perciò anche in questo caso siamo sicuri che le soluzioni sono confinate dentro delle strisce $y_k < y < y_{k+1}$ dove gli y_k o sono degli zeri di h oppure sono i valori $\pm\infty$. Se ci troviamo dentro una di queste strisce possiamo dividere per $h(y) \neq 0$ l'equazione differenziale $y' = h(y)a(t)$ e quindi espicitando la dipendenza da t la riscriviamo $\frac{y'(t)}{h(y(t))} = a(t)$, cerchiamo l'integrale indefinito di entrambi i membri questi dovranno coincidere a meno di una costante. Si avrà

$$A(t) + c = \int a(t)\,dt = \int \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,dt = \int \frac{1}{h(y)}\,dy = B(y)$$

e quindi $y(t) = B^{-1}(A(t) + c)$. Osserviamo che la funzione B è sicuramente invertibile nella striscia scelta in quanto la sua derivata $\frac{1}{h(y)}$ ha segno costante. Per trovare una soluzione in modo esplicito di un problema di Cauchy in cui $f(t, y) = h(y)a(t)$ bisogna trovare due integrali indefiniti e scrivere l'inversa della primitiva B e infine determinare la soluzione imponendo la condizione iniziale.
Ragionamenti qualitativi si possono fare anche nel caso più generale in cui $f = f(t, y)$, in questo caso è però più complicato trarre delle conclusioni ma qualcosa si può comunque dire.

Esercizio 1 Si faccia uno studio qualitativo del problema di Cauchy $y'(t) = y^2 + t^2 - 1$, $y(0) = 0$. In particolare si provi che la soluzione y è localmente decrescente ed ha un flesso nel punto $t = 0$.

Esercizio 2 Si faccia uno studio qualitativo del problema di Cauchy $y'(t) = y^2 - t$, $y(0) = 0$. In particolare si provi che la soluzione y ammette un punto di massimo relativo in $t = 0$. Si provi che in realtà quello è proprio il punto di massimo assoluto per la funzione y e che questa non ammette altri estremi relativi.