Teorema delle Funzioni Implicite

Sia F una funzione di due variabili definita in un opportuno dominio D di $\mathbb{R}^2$. Consideriamo l'equazione $F(x, y) = 0$, questa avrà come soluzioni coppie di valori (x, y) che formeranno un luogo geometrico sul piano cartesiano. Questo corrisponderà ad una curva di livello della funzione F.

Alcuni esempi

Esempio 1 Consideriamo $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$. In questo caso non esiste nessuna coppia (x, y) che soddisfa questa equazione.

Esempio 2 Consideriamo $F(x, y) = x^2 + y^2 = 0$. In questo caso l'unica soluzione è data dall'origine degli assi $(0, 0)$.

Esempio 3 Consideriamo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Finalmente un vero luogo geometrico, una circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Esempio 4 Consideriamo $F(x, y) = x^2 - y^2 = 0$. La soluzione è data dalle due bisettrici $y = x$ e $y = -x$.

Questi esempi mostrano che possono accadere varie situazioni, l'unica cosa in comune è il fatto che possiamo trovare le soluzioni esplicitamente.
Ora consideriamo $F(x, y) = e^{xy} - x - 1 + y$. In questo caso è piuttosto difficile dire come è fatto il luogo geometrico $F(x, y) = 0$ al più ci possiamo trovare qualche soluzione, ad esempio possiamo osservare che $(0, 0)$ ci fornisce una soluzione dell'equazione.
Ci piacerebbe almeno sapere se vicino al punto $(0, 0)$ ci sono altre soluzioni, l' Esempio 2 ci mostra che in generale ciò non è detto.
Inoltre ci chiediamo se, almeno localmente, tutte le soluzioni dell'equazione $F(x, y) = 0$ si possono rappresentare tramite una funzione della sola x oppure tramite una funzione della sola y, ovvero se esiste una funzione f tale che $F(x, f(x)) = 0$ o esiste una funzione g tale che $F(g(y), y) = 0$.
Consideriamo l'Esempio 3, fissiamo ad esempio il punto $(0, 1)$ che è soluzione dell'equazione $F(x, y) = 0$. In questo caso possiamo rappresentare localmente le soluzioni tramite i punti del tipo $(x, \sqrt{1 - x^2})$, quindi f sarà uguale $\sqrt{1 - x^2}$. Se invece consideriamo il punto $(1, 0)$ ci accorgiamo che in un intorno di questo punto non esiste un' unica funzione f tramite la quale poter rappresentare le soluzioni; infatti nell' intorno di questo punto le soluzioni sono date da tutti i punti del tipo $(x, \pm\sqrt{1 - x^2})$. D'altra parte in questo

caso esisterà una funzione $g = \sqrt{1-y^2}$, tale che tutte le soluzioni si potranno rappresentare in un intorno del punto tramite g, ovvero saranno del tipo $(g(y), y)$.

Nell' Esempio 4 nell' intorno dell' origine non riusciamo a rappresentare le soluzioni ne tramite una funzione della x ne tramite una funzione della y.

Dopo aver visto tutte queste possibilità è arrivato il momento di enunciare il Teorema delle funzioni implicite, noto anche come Teorema del Dini. Questo risponderà a qualche nostra domanda.

Teorema 1 *Sia D un aperto di $\mathbb{R}^2$, sia $F \in C^1(D)$, sia $(x_0, y_0) \in D$, supponiamo che le seguenti ipotesi siano verificate*

i) $F((x_0, y_0)) = 0$;

ii) $F_y((x_0, y_0)) \neq 0$.

Allora esistono due costanti positive a e b ed una funzione $f : (x_0 - a, x_0 + a) \to (y_0 - b, y_0 + b)$, tali che

$$F(x,y) = 0 \ \textit{ in } (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b) \ \Leftrightarrow \ y = f(x)$$

Inoltre $f \in C^1((x_0 - a, x_0 + a))$ e

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Ovviamente sarà $f(x_0) = y_0$ ed in realtà, in generale, questo è l'unico valore che conosciamo esplicitamente per la funzione f, per il resto sappiamo solo che esiste e che la sua derivata si scrive in una certa forma implicita.

Dimostrazione de Teorema. Sappiamo per ipotesi che $F((x_0, y_0)) = 0$ e che $F_y((x_0, y_0)) \neq 0$, consideriamo il caso in cui $F_y((x_0, y_0)) > 0$, l'altro caso è completamente analogo. Per il teorema della permanenza del segno esisterà un intorno del tipo $(x_0 - \rho, x_0 + \rho) \times (y_0 - b, y_0 + b)$ con ρ e b opportune costanti positive in cui F_y rimarrà di segno strettamente positivo. Dal momento che $F(x_0, y_0) = 0$ e la funzione è crescente in y avremo che $F(x_0, y_0 + b) > 0$ e $F(x_0, y_0 - b) < 0$, applicando ancora il teorema della permanenza del segno alle funzioni $F(\cdot, y_0 + b)$ e $F(\cdot, y_0 - b)$ (mettiamo il punto per indicare che pensiamo F come funzione solo di quella variabile) avremo che esisterà una costante $a \leq \rho$ tale che

$$F(x, y_0 + b) > 0, \quad F(x, y_0 - b) < 0 \ \text{ per ogni } x \in (x_0 - a, x_0 + a).$$

A questo punto per ogni $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$ fissato possiamo considerare la funzione $F(x, \cdot)$ pensata come funzione della sola y. Applicando il teorema sull' esistenza degli zeri avremo che

$$\forall x \in (x_0 - a, x_0 + a)\ \exists!\, y \in (y_0 - b, y_0 + b) \text{ tale che } F(x, y) = 0.$$

Questo dimostra la prima parte del teorema la funzione f è individuata dalla proprietà precedente.

Vediamo la seconda parte. Fissiamo $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$. Per ogni h piccolo vale l'uguaglianza $0 = F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x))$, questo semplicemente per come è definita la funzione f. Ora riscriviamo il secondo membro dell' uguaglianza precedente utilizzando il teorema di Lagrange valido in più variabili (pag. 66 Vol II/1). Abbiamo che per ogni h esiste $\theta \in (0, 1)$ tale che

$$\begin{gathered} 0 = F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x)) = \\ F_x(x + \theta h, f(x) + \theta(f(x + h) - f(x)))h + \\ F_y(x + \theta h, f(x) + \theta(f(x + h) - f(x)))(f(x + h) - f(x)). \end{gathered} \tag{1}$$

Perciò abbiamo

$$|f(x + h) - f(x)| = \left| \frac{F_x(x + \theta h, f(x) + \theta(f(x + h) - f(x)))}{F_y(x + \theta h, f(x) + \theta(f(x + h) - f(x)))} \right| . |h|$$

Dal momento che F_y sarà più grande di un' opportuna costante positiva in $(x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$, avremo che esiste una costante positiva M (dipendente da F_x e F_y) tale che

$$|f(x + h) - f(x)| \leq M|h|$$

e quindi la funzione f sarà continua in x. Dall' arbitrarietà di x si ha la continuità in tutto l'intervallo.

Per dimostrare la derivabilità ripartiamo dall'uguaglianza (1) e otteniamo

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{F_x(x + \theta h, f(x) + \theta(f(x + h) - f(x)))}{F_y(x + \theta h, f(x) + \theta(f(x + h) - f(x)))}$$

passando al limite per h tendente a zero e utilizzando la continuità ora nota della funzione f, avremo che tale funzione risulterà derivabile con derivata proprio uguale a $-\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$.

Si può dimostrare che se F ha regolarità $C^k(D)$ allora anche la funzione f definita in modo implicito avrà la stessa regolarità. In particolare se F ha derivate parziali continue fino al secondo ordine si avrà

$$f''(x) = -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}(x, f(x)).$$

Esempio 5 Riprendiamo la funzione $F(x, y) = e^{xy} - x - 1 + y$, studiamo il problema $F(x, y) = 0$. Abbiamo visto che $F(0, 0) = 0$, ora vediamo se possiamo applicare il Teorema del Dini, consideriamo le derivate parziali di F rispetto ad x ed y.

$$F_x(x, y) = ye^{xy} + 1, \quad F_y(x, y) = xe^{xy} - 1.$$

Osserviamo che $F_y(0, 0) = -1 \neq 0$, allora possiamo applicare il Teorema e quindi siamo sicuri che esiste una funzione $f(x)$ tale che le soluzioni del problema sono date localmente dai punti $(x, f(x)$. Questo ci dice in particolare, che esistono altre soluzioni dell' equazione $F(x, y) = 0$ e aggiunge una informazione interessante circa queste soluzioni.
Inoltre tramite la seconda parte del Teorema abbiamo che possiamo anche calcolarci $f'(0)$, questa sarà uguale ad 1

Esercizio 1 Dimostrare che l'equazione $F(x, y) = e^x \sin(y) + e^y \cos(x) - 1 = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0)$ una funzione $y = f(x)$ tale che $F(x, f(x)) = 0$. Dire se in 0 la funzione f ammette max o min relativo.

Esercizio 2 Data l'equazione $F(x, y) = x^5 \sin(y) + y\cos(x) - \pi = 0$. Dimostrare che

i) esiste un unico y_0 tale che $F(0, y_0) = 0$.

ii) l'equazione definisce implicitamente in un intorno di $(0, y_0)$ una funzione $y = f(x)$ tale che $F(x, f(x)) = 0$.

iii) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione $f(x)$.

Esercizio 3 Dimostrare che l'equazione $F(x, y) = e^{\tan(x+y)} - x - 3y - 1 = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0)$ una funzione $y = f(x)$ tale che $F(x, f(x)) = 0$. Dire se in 0 la funzione f ammette max o min relativo.

Esercizio 4 Dimostrare che l'equazione $F(x, y) = y + x^2 \sin(y) + x\cos(y) + xy = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0)$ una funzione $y = f(x)$ tale che $F(x, f(x)) = 0$. Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + x}{x^2}.$$

Abbiamo visto che il Teorema del Dini ci assicura, sotto opportune ipotesi, che una equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $f(x)$ tale che $F(x, f(x)) = 0$, ovviamente con le opportune modifiche questa definirà implicitamente anche una funzione $g(y)$ tale che $F(g(y), y) = 0$. Infatti vale il seguente risulatato.

Sia $F \in C^1(D)$, sia $(x_0, y_0) \in D$, supponiamo che

i) $F((x_0, y_0)) = 0$;

ii) $F_x((x_0, y_0)) \neq 0$.

Allora esistono due costanti positive a e b ed una funzione $g : (y_0-b, y_0+b) \to (x_0 - a, x_0 + a)$, tali che

$$F(x, y) = 0 \text{ in } (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b) \Leftrightarrow x = g(y).$$

Inoltre $g \in C^1((y_0 - b, x_0 + b))$ e

$$g'(y) = -\frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)}.$$

Esercizio 5 Ritrovare, utilizzando questa ultima forma del Teorma del Dini, le ipotesi sotto le quali una funzione f di regolarità C^1 è invertibile localmente, in particolare scrivere, utilizzando il risultato di sopra, la derivata dell' inversa.

Esercizio 6 Dimostrare che l'equazione $F(x, y) = y^2 + x + e^{x^2+y^2} - 1 = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0)$ una funzione $x = g(y)$ tale che $F(g(y), y) = 0$. Calcolare $g'(0)$.

Da quanto visto, segue che data l'equazione $F(x, y) = 0$, se (x_0, y_0) è una soluzione di questa e contemporaneamente $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ allora l'equazione definisce localmente una curva la cui retta tangente nel punto (x_0, y_0) è data dall' equazione

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{2}$$

La condizione $\nabla F \neq (0, 0)$ è sufficiente ma non necessaria come mostra l'esempio $F(x, y) = (x - y)^2$; infatti in tal caso le soluzioni dell' equazione $F(x, y) = 0$ sono date dalla retta $y = x$ che è evidentemente una curva regolare, ma il gradiente di F è nullo in tutti i punti della retta.

Se consideriamo l'intersezione di due curve definite implicitamente dalle equazioni $F(x, y) = 0$ e $G(x, y) = 0$, possiamo calcolare il coseno dell'angolo

ω che formano le due curve nel punto di intersezione (x_0, y_0), questo sarà dato da

$$\cos(\omega) = \frac{F_x G_x + F_y G_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\sqrt{G_x^2 + G_y^2}}(x_0, y_0).$$

In particolare abbiamo che le due curve sono ortogonali nel punto (x_0, y_0) se e solo se

$$(F_x G_x + F_y G_y)(x_0, y_0) = 0.$$

Mentre le due curve sono parallele, sempre nel punto (x_0, y_0), se e solo se

$$(F_x G_y - F_y G_x)(x_0, y_0) = 0.$$

Il Teorema del Dini si può generalizzare a funzioni di più variabili come mostra il seguente

Teorema 2 *Sia $D \subset \mathbb{R}^3$, sia $F \in C^1(D)$, sia $(x_0, y_0, z_0) \in D$, supponiamo che le seguenti ipotesi siano verificate*
i) $F((x_0, y_0, z_0)) = 0$;
ii) $F_z((x_0, y_0, z_0)) \neq 0$.
Allora esistono tre costanti positive a, b e c ed una funzione $\varphi : (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b) \to (z_0 - c, z_0 + c)$, tali che

$$F(x, y, z) = 0 \ \text{ in } (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b) \times (z_0 - c, z_0 + c) \ \Leftrightarrow \ z = \varphi(x, y).$$

Inoltre $\varphi \in C^1((x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, x_0 + b))$ e

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, \varphi(x, y))}{F_z(x, y, \varphi(x, y))},$$

$$\varphi_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, \varphi(x, y))}{F_z(x, y, \varphi(x, y))}.$$

Se invece della condizione (ii) nel Teorema precedente avessimo avuto la condizione $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ o la condizione $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ avremmo potuto esplicitare rispetto alle altre variabili. Quindi se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ l' equazione $F(x, y, z) = 0$ definisce localmente in modo implicito una superficie e l'equazione del piano tangente nel punto (x_0, y_0, z_0) è data da

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Date due funzioni F, G definite in $D \subset \mathbb{R}^3$, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

supponiamo che (x_0, y_0, z_0) sia una soluzione di (3), allora se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$ e $\nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$, le due equazioni definiscono intorno a questo punto (x_0, y_0, z_0) due superfici, possiamo calcolare il coseno dell'angolo ω formato dalle due normali alle superfici nel punto in questione, questo sarà dato da

$$\cos(\omega) = \frac{F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}(x_0, y_0, z_0).$$

In questo caso possiamo aspettarci che l'intersezione tra le due superfici dia luogo ad una curva nello spazio qualora i due piani tangenti alle superfici non coincidano. Ovvero ∇F e ∇G non siano paralleli nel punto (x_0, y_0, z_0). Consideriamo l'equazione $F(x,y,z) = 0$ e supponiamo che valga la condizione $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ allora esiste per il Teorema 2 una funzione $\varphi(x,y)$ tale che localmente le soluzioni dell' equazione sono date dai punti $(x, y, \varphi(x,y))$, sostituiamo nella seconda equazione, questa diventa

$$H(x,y) := G(x, y, \varphi(x,y)) = 0.$$

Ora vogliamo vedere se questa equazione definisce in modo implicito la y in funzione di x. Sappiamo che $H(x_0, y_0) = 0$ e vogliamo che sia verificata la condizione $H_y(x_0, y_0) \neq 0$. Abbiamo

$$H_y(x,y) = G_y(x, y, \varphi(x,y)) + G_z(x, y, \varphi(x,y))\varphi_y(x,y) = (G_y - \frac{G_z F_y}{F_z})(x, y, \varphi(x,y)).$$

La seconda condizione del dini è verificata se

$$(G_y F_z - G_z F_y)(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \tag{4}$$

in tal caso esiste una funzione $\alpha(x)$ tale che localmente la soluzione di $H(x,y) = 0$ è data dai punti $(x, \alpha(x))$.

Perciò le soluzioni del sistema iniziale le possiamo rappresentare localmente tramite una curva $(x, \alpha(x), \varphi(x, \alpha(x)))$, parametrizzata tramite il parametro x.

Riassumendo vale il seguente risultato

Proposizione 1 *Sia (x_0, y_0, z_0) una soluzione del sistema (5) supponiamo che sia verificata la condizione (4), allora esistono tre costanti positive a, b e c e due funzioni*

$$\alpha : (x_0 - a, x_0 + a) \to (y_0 - b, y_0 + b), \quad \beta : (x_0 - a, x_0 + a) \to (z_0 - c, z_0 + c),$$

tali che

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \text{in } (x_0-a, x_0+a)\times(y_0-b, y_0+b)\times(z_0-c, z_0+c) \Leftrightarrow y = \alpha(x),\ z = \beta(x).$$

Inoltre α e $\beta \in C^1((x_0 - a, x_0 + a)$ e

$$\alpha'(x) = \frac{G_x F_z - G_z F_x}{G_z F_y - G_y F_z}(x, \alpha(x), \beta(x)),$$

$$\beta'(x) = \frac{G_y F_x - G_x F_y}{G_z F_y - G_y F_z}(x, \alpha(x), \beta(x)).$$

Anche in questo caso se non vale la condizione (4) possiamo comunque sperare che il sistema definisca implicitamente una curva, condizione sufficiente perché ciò avvenga è che il rango della matrice $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$ sia uguale a 2. Ovvero che i due vettori gradienti non siano paralleli. Osserviamo che la condizione (4) equivale a dire che la matrice $\begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix}$ abbia determinante non nullo. Se fosse diverso da zero il determinante della matrice $\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}$ allora la curva si parametrizzerebbe tramite la variabile z, mentre se fosse non nullo il determinante $\begin{pmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{pmatrix}$ la curva si parametrizzerebbe tramite la variabile y.
Per ottenere l'espressione relativa alle derivate α e β basta derivare entrambe l'equazioni del sistema

$$\begin{cases} F(x, \alpha(x), \beta(x)) = 0 \\ G(x, \alpha(x), \beta(x)) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

e poi risolvere il sistema lineare in α' e β' che si ottiene.

Esercizio 7 Dimostrare che l'equazione $F(x, y, z) = e^z + ze^{x+y} - e^{x-y} = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0, 0)$ una funzione $z = \varphi(x, y)$ tale che $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$. Trovare il piano tangente nel punto $(0, 0, 0)$ alla superficie definita in modo implicito.

Esercizio 8 Dato il sistema

$$\begin{cases} \cos(x) + z\sin(y) = 0, \\ \sin(x) - \cos(yz) = 0 \end{cases}$$

dimostrare che si può applicare la Proposizione 1 nel punto $(\pi, \frac{\pi}{2}, 1)$ e quindi che tale sistema definisce implicitamente nell'intorno di tale punto due funzioni α e β tali che i punti $(x, \alpha(x), \beta(x))$ sono soluzioni del sistema.

Esercizio 9 Dimostrare che l'equazione $F(x, y, z) = \sin(xe^y) + \cos(z)e^y - 1 = 0$ definisce implicitamente una superficie in un intorno di $(0, 0, 0)$. Trovare il piano tangente alla superficie nel punto $(0, 0, 0)$.

Esercizio 10 Dimostrare che l'equazione $G(x, y, z) = x^2 - e^{xz} - z + 1 = 0$ definisce implicitamente una superficie in un intorno di $(0, 0, 0)$. Trovare il piano tangente alla superficie nel punto $(0, 0, 0)$.

Esercizio 11 Siano F e G le funzioni definite negli esercizi precedenti. Dimostrare che il sistema

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

definisce implicitamente in un intorno del punto (0, 0, 0) una curva nello spazio. Calcolare la retta tangente alla curva nell'origine.

Concludiamo l'argomento enunciando una forma più generale del teorema delle funzioni implicite.

Teorema 3 *Sia D un aperto di $\mathbb{R}^{n+m}$, data la funzione vettoriale*

$$H : D \to \mathbb{R}^m, \quad H = (F^1, \cdots, F^m), \quad F^1, \cdots, F^m, \in C^1(D).$$

Indichiamo con X il vettore $(x_1, \cdots, x_n)$ e con Y il vettore $(y_1, \cdots, y_m)$, definiamo inoltre la matrice $m \times m$

$$\frac{\partial H}{\partial Y} := \begin{pmatrix} F^1_{y_1} & F^1_{y_2} & \cdots & F^1_{y_m} \\ F^2_{y_1} & F^2_{y_2} & \cdots & F^2_{y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F^m_{y_1} & F^m_{y_2} & \cdots & F^m_{y_m} \end{pmatrix}$$

e la matrice $m \times n$

$$\frac{\partial H}{\partial X} := \begin{pmatrix} F^1_{x_1} & F^1_{y_2} & \cdots & F^1_{x_n} \\ F^2_{x_1} & F^2_{x_2} & \cdots & F^2_{x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F^m_{x_1} & F^m_{x_2} & \cdots & F^m_{x_n} \end{pmatrix}$$

Supponiamo che nel punto $(X_0, Y_0) :\equiv (x_1^0, \cdots, x_n^0, y_1^0, \cdots, y_m^0) \in D$ *siano verificate le seguenti condizioni*

i) $H(X_0, Y_0) = (0, 0, \cdots, 0)$,

ii) la matrice $\frac{\partial H}{\partial Y}$ *calcolata nel punto* (X_0, Y_0) *abbia determinante diverso da zero.*

Allora esiste un intorno $R = I \times J$ *di* (X_0, Y_0) $(I \in \mathbb{R}^n$ *e* $J \in \mathbb{R}^m)$ *ed una funzione* $f : I \to J$*, tale che*

$$H(X, Y) = (0, \cdots, 0) \ \textit{in } I \times J \Leftrightarrow Y = f(X).$$

Inoltre $f \in C^1(I)$ *e la matrice* $m \times n$ *delle derivate parziali*

$$\frac{\partial f}{\partial X}(X) := \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & f^1_{x_2} & \cdots & f^1_{x_n} \\ f^2_{x_1} & f^2_{x_2} & \cdots & f^2_{x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^m_{x_1} & f^m_{x_2} & \cdots & f^m_{x_n} \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial H}{\partial Y}\right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial X}(X, f(X)).$$

Esercizio 12 Utilizzando il Teorema precedente si verifichi che una condizione sufficiente affinché una funzione regolare $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia invertibile con inversa derivabile in un intorno di un suo punto $X_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$ è che il determinante dello Jacobiano della funzione ϕ nel punto dato X_0 sia non nullo.

Suggerimento si consideri la funzione $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ *definita da* $H = (y_1 - \phi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_n - \phi_n(x_1, \cdots, x_n))$ *e si applichi il teorema precedente cercando di vedere quando l'equazione* $H = (0, \cdot, 0)$ *permette di esplicitare le variabili* X *in funzione delle variabili* Y.