Esistenza ed unicità per equazioni differenziali

Per concludere queste lezioni sulle equazioni differenziali vogliamo dimostrare il teorema esistenza ed unicità per il problema di Cauchy. Faremo la dimostrazione nel caso scalare, tenendo presente che per i sistemi la dimostrazione segue la stessa linea. Richiamiamo il teorema nel caso scalare.

Teorema 1 *Supponiamo che la funzione f ammetta in un intorno $R := [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset D$ derivata parziale rispetto ad y e che questa sia limitata in tale intorno, ovvero esista una costante M tale che*

$$|f_y(t, y)| \leq M \qquad \text{per ogni } (t, y) \in R,$$

allora esiste un'unica soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

definita in un intorno $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [t_0 - a, t_0 + a]$.

Per dimostrare questo risultato abbiamo bisogno del seguente lemma

Lemma 0.1 *Una funzione $y(t)$ è soluzione del problema di Cauchy (1) in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ se e solo se*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \tag{2}$$

per ogni $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Questo è una conseguenza immediata del teorema di Torricelli.
Dimostrazione dell'esistenza per il Teorema di Cauchy Scegliamo $\delta < \min\{a, \frac{b}{\overline{M}}, \frac{1}{2\overline{M}}\}$ dove $\overline{M}$ è una costante tale che $|f_y| \leq \overline{M}$ e $|f| \leq \overline{M}$ in R, basta scegliere $\overline{M} = \max\{M, \max_{(t,y)\in R} |f(t, y)|\}$.
Non è restrittivo considerare il caso in cui $t_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Se così non fosse ci possiamo ricondurre a questo caso tramite i cambi di variabile $\theta = t - t_0$ e $\eta = y - y_0$. Consideriamo la seguente successione di funzioni $\{y_n\}$ definite in $(-\delta, \delta)$ nel seguente modo

$$\begin{cases} y_0 \equiv 0 \\ y_n(t) = \int_0^t f(s, y_{n-1}(s))\, ds \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3}$$

Vogliamo dimostrare che la successione di funzioni converge uniformemente ad una funzione $y(t)$ che sarà la soluzione del problema.

Osservazione: $|y_n(t)| \le b$ per ogni $t \in (-\delta,\delta)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Questo si può provare per induzione, infatti $y_0(t)$ verifica banalmente questa stima, supponiamo che sia vero per $n-1$, dal momento che per ogni $s \in (-\delta,\delta)$ il punto $(s, y_{n-1}(s)) \in R$, allora per ogni $t \in (-\delta,\delta)$ si ha

$$|y_n(t)| \le \operatorname{sgn}(t) \int_0^t |f(s, y_{n-1}(s))|\, ds \le M\delta \le b,$$

con $\operatorname{sgn}(t)$ indichiamo il segno di t, questo ci è utile per scrivere in forma compatta il fatto che l'integrale è fatto tra l'estremo più piccolo e quello più grande, ovvero se $t < 0$ c'è un segno meno e quindi questo è come dire che integriamo tra t e 0.
Ora stimiamo la differenza $|y_n(t) - y_{n-1}(t)|$, otteniamo dopo aver utilizzato il teorema di Lagrange e la stima $f_y \le \overline{M}$ in R

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le \operatorname{sgn}(t) \int_0^t |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))|\, ds \le$$

$$\operatorname{sgn}(t)\overline{M} \int_0^t |y_{n-1}(s)) - y_{n-2}(s)|\, ds \le$$

$$\delta M \sup_{(-\delta,\delta)} |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| \le \frac{1}{2} \sup_{(-\delta,\delta)} |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)|.$$

Siccome la stima è vera per ogni $t \in (-\delta,\delta)$, abbiamo

$$\sup_{(-\delta,\delta)} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le \frac{1}{2} \sup_{(-\delta,\delta)} |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)|.$$

Ponendo $d_n = \sup_{(-\delta,\delta)} |y_n(s) - y_{n-1}(s)|$, abbiamo quindi per ogni n

$$d_n \le \frac{1}{2} d_{n-1} \le \frac{1}{2}\frac{1}{2} d_{n-2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d_1 \le b\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \tag{4}$$

Utilizziamo la (4) per provare che la successione y_n converge uniformemente. In particolare facciamo vedere che la successione $\{y_n(t)\}$ è di Cauchy uniformemente in $(-\delta,\delta)$, ovvero per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\overline{n}(\epsilon)$ tale che

$$\sup_{t\in(-\delta,\delta)} |y_n(t) - y_m(t)| \le \epsilon \quad \textit{se } n, m \ge \overline{n}(\epsilon). \tag{5}$$

Possiamo supporre che $m > n$, dal momento che per ogni t abbiamo

$$|y_m(t) - y_n(t)| \le |y_m(t) - y_{m-1}(t)| + |y_{m-1}(t) - y_{m-2}(t)| + \cdots + |y_{n+1}(t) - y_n(t)|$$

passando ai sup otteniamo

$$\sup_{t\in(-\delta,\delta)} |y_n(t) - y_m(t)| \leq d_m + d_{m-1} + \cdots + d_{n+1} \leq (\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} \cdots + \frac{1}{2^n})b$$

$$= b\frac{1}{2^n}\left(\sum_{i=0}^{m-n-1} \frac{1}{2^i}\right) \leq b\frac{1}{2^n}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i}\right) = \frac{b}{2^{n-1}},$$

questo assicura la (5), la quale a sua volta implica la convergenza uniforme delle $\{y_n\}$ ad una funzione y in $(-\delta, \delta)$ (vedi Courant John Vol I pag 534). Per dimostrare che la funzione $y(t)$ è soluzione del problema di Cauchy passiamo al limite nella (3). Dal momento che la convergenza uniforme di $y_n(t)$ ad $y(t)$ implica la convergenza uniforme della successione $f(t, y_{n-1}(t))$ a $f(t, y(t))$, passando al limite sotto il segno di integrale si ottiene dalla (3) per ogni $t \in (-\delta, \delta)$

$$y(t) = \int_0^t f(s, y(s))\, ds.$$

Quindi la funzione y è soluzione del problema di Cauchy.

Osserviamo che questo teorema oltre ad assicurare l'esistenza, fornisce anche un metodo costruttivo per approssiamare la soluzione tramite la successione definita in (3).

Esercizio 1 Ritrovare la soluzione del problema di Cauchy $y' = y - 1$, $y(0) = 0$, come limite della successione definita in (3).

Il teorema precedente da' un risultato di esistenza locale, ovviamente si può pensare di prolungare la soluzione, il problema è che il passo del prolungamento δ può diventare sempre più piccolo e quindi anche qualora la funzione f fosse definita su tutto $\mathbb{R}^2$ non è detto affatto che si riesca ad estendere la soluzione su tutto $\mathbb{R}$. La dimostrazione del teorema precedente ci fa capire che δ va come l'inverso del sup di $|f_y|$, perciò se questo non è limitato globalmente il prolungamento può diventere sempre più piccolo.
Se invece consideriamo un compatto K che contiene (t_0, y_0) punto iniziale per il problema di Cauchy, allora se la funzione $f \in C^1(K)$ è sicuro che la soluzione si può prolungare fino ad arrivare alla frontiera di K. Questo perché nel compatto possiamo stimare in modo uniforme $|f|$ e $|f_y|$ (vedi Courant John vol II/2 pag 705).

Per dimostrare l'unicità vogliamo utilizzare il Lemma di Gronwall che ci darà anche un risultato di dipendenza continua dai dati.

Lemma di Gronwall *Siano* $h \in C(I)$, $h \geq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^+$, $t_0 \in I$ *tali che*

$$h(t) \leq a + b\,\mathrm{sgn}(t - t_0) \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds \quad \textit{se} \;\; t \geq t_0$$

allora $h(t) \leq ae^{b|t-t_0|}$.

Limitiamoci a dimostrare la disuguaglianza nel caso $t \geq t_0$, l'altro caso si fa in maniera analoga.
Poniamo $w(t) = a + b \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds$ allora $w \in C^1(I)$ e $w'(t) = bh(t)$ e quindi dall'ipotesi iniziale $w'(t) \leq bw(t)$ se $t \geq t_0$. Ora poniamo $g(t) = w(t)e^{-b(t-t_0)}$ e osserviamo che $g(t) \leq a$ per $t \geq t_0$. A tale proposito basta vedere che $g(t_0) = a$ e $g'(t) = e^{-b(t-t_0)}(w'(t) - bw(t)) \leq 0$. Una volta provato questo abbiamo terminato infatti

$$h(t) \leq w(t) \leq ae^{b(t-t_0)}.$$

Ora siamo in grado di utilizzare questo potente risultato per avere l'unicità e non solo. Infatti date due soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_{01}, \end{cases} \tag{6}$$

e

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_{02}, \end{cases} \tag{7}$$

che indichiamo rispettivamente con y_1 e y_2 tali che $(t, y_i(t))$ siano in un rettangolo $R \subset D$ in cui $f_y \leq M$, sappiamo che queste verificano

$$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f(s, y_i(s))\,ds,$$

allora possiamo fare la seguente maggiorazione

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_{01} - y_{02}| + \mathrm{sgn}(t - t_0) \int_{t_0}^{t} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|\,ds \leq$$

$$\leq |y_{01} - y_{02}| + M\,\mathrm{sgn}(t - t_0) \int_{t_0}^{t} |y_1(s) - y_2(s)|\,ds,$$

perciò applicando il lemma di Gronwall alla funzione $|y_1(t) - y_2(t)|$, si ottiene

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_{01} - y_{02}|e^{M|t-t_0|},$$

in particolare se i dati iniziali y_{01} e y_{02} sono uguali allora necessariamente le due soluzioni devono coincidere da cui segue il risultato di unicità del Teorema di Cauchy. Come detto la disuguaglianza di sopra dice anche qualcosa in più perché permette di stimare la differenza tra due soluzioni in funzione dei dati iniziali. Se possiamo stimare l'errore nello scegliere un dato iniziale possiamo stimare come l'errore si ripercuote nella soluzione.

Un'ulteriore applicazione del Lemma di Gronwall si ha nella dimostrazione del seguente risultato .

Proposizione 1 *Sia $D = I \times \mathbb{R}$, dove I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Sia $f \in C^1(D)$, supponiamo che esistano due funzioni $a(t)$ e $b(t)$, continue e positive su I, tali che*

$$|f(t,y)| \leq a(t) + b(t)|y| \qquad \text{in } D,$$

allora dato un qualsiasi punto $(t_0, y_0) \in D$ la soluzione del problema di Cauchy: $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ è prolungabile su tutto l'intervallo I.

Diamo un'idea della dimostrazione. La soluzione esiste finché possiamo prolungarla, questo è possibile finché non ci avviciniamo alla frontiera del dominio di definizione, ma per come è fatto $D = I \times \mathbb{R}$ ci aspettiamo che si verificano due possibilità, una è che arriviamo fino alla frontiera di I (quello che dice la tesi) l'altra è che la soluzione vada a $+\infty$ o $-\infty$ ("frontiera di $\mathbb{R}$") in uno degli estremi di un intervallo J strettamente contenuto in I. Proviamo che questa ultima possibilità è assurda. Infatti indichiamo con $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy e supponiamo che la soluzione diventi illimitata in un estremo destro di un sottinsieme J (per l'estremo sinistro la dimostrazione è analoga) allora

$$|y(t)| \leq |y_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s))|\, ds \leq |y_0| + \int {t_0}^t a(s) + b(s)|y(s)|\, ds$$

per ogni $t \geq t_0$, $t \in J$, da questo si deduce che esistono due costanti C e D dipendenti solo da y_0, dai massimi delle funzioni a e b in J e dall'ampiezza dello stesso J tali che

$$|y(t)| \leq C + D \int_{t_0}^{t} |y(s)\, ds$$

e quindi dal lemma di Gronwall si ha $|y(t)| \leq Ce^{D(t-t_0)}$ per ogni $t \geq t_0$, $t \in J$, questo contraddice il fatto che la soluzione diventi illimitata all'estremo destro di J.

Un risultato analogo a quello della proposizione precedente vale per i sistemi, se si stima il modulo della funzione vettoriale $F(t, Y)$ tramite $a(t) + b(t)|Y|$, con a e b funzioni continue e positive su l'intervallo I, allora la soluzione del problema di Cauchy è prolungabile su tutto I.
In particolare l'equazioni lineari di ordine n si possono ridurre ad un sistema del primo ordine per il quale vale la stima di sopra. Questo è il motivo per cui le soluzioni sono sempre prolungabili su tutto l'intervallo di definizione dei coefficienti $c_i(t)$.