Analisi vettoriale - A.A. 2003/04

Primo esonero - 30 ottobre 2003

Soluzioni

1. Esercizio

Detto E l'insieme definito implicitamente dall'equazione

$$xy + y^2 = 1$$

ed $f(x, y) = x^2 + y^2$,

- *esaminare se $f(x, y)$ ammette massimo o minimo su E,*
- *determinare gli eventuali valori di massimo o minimo,*
- *determinare i punti di E in cui tali estremi sono assunti.*

1.1. Soluzione.

L'insieme E definito dall'equazione $xy + y^2 = 1$ é un'iperbole,

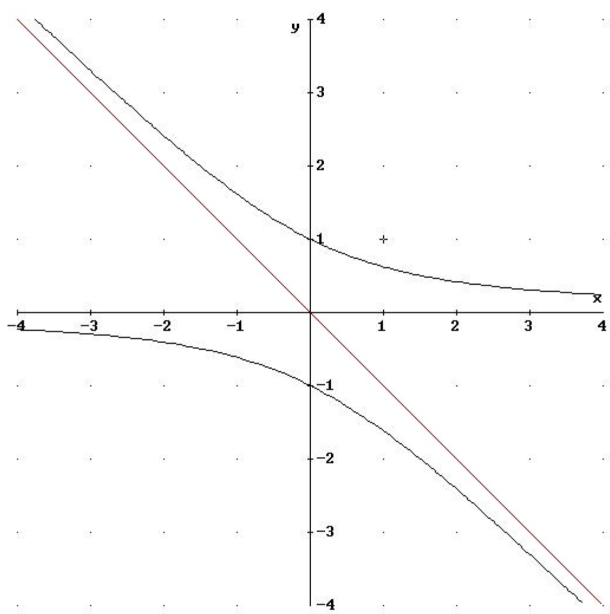

Figura 1. L'iperbole del primo esercizio.

insieme del piano chiuso ma non limitato: quindi, a priori non é assicurato che la funzione continua $x^2 + y^2$ abbia minimo e massimo su E

- MASSIMO: la funzione $f(x,y) = x^2+y^2$ rappresenta il quadrato della distanza del punto (x,y) dall'origine, tenuto conto che E é un insieme illimitato la funzione $f(x,y)$ sará altrettanto illimitata superiormente su E: in altri termini esistono punti $P \in E$ distanti dall'origine piú di qualunque valore positivo si scelga.
  Quindi non esiste il massimo.
- MINIMO: sia
  $$\ell = \inf_{(x,y)\in E} f(x,y)$$
  l'estremo inferiore di f. Riesce certamente $\ell > 0$ perché $f = 0$ solo sull'origine, punto che ha distanza positiva da E, e riesce, anche certamente,
  $$\ell = \min_{(x,y)\in K} f(x,y)$$
  essendo
  $$K = E \cap \left\{x^2 + y^2 \leq 2\ell\right\}$$
  l'insieme chiuso e limitato costituito dalla parte[1] di iperbole E contenuta nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 2\ell$
  Quindi ℓ, come minimo, é un valore di f, assunto in qualche punto di E.
- i punti di estremo (minimi, massimi, flessi...) si trovano tra quelli individuati dall'algoritmo dei moltiplicatori di Lagrange, punti che soddisfano il sistema
  $$\begin{cases} f_x + \lambda\, g_x & = 0 \\ f_y + \lambda\, g_y & = 0 \\ g & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + \lambda\, y & = 0 \\ 2y + \lambda\,(x + 2y) & = 0 \\ xy + y^2 - 1 & = 0 \end{cases}$$
  Dalle prime due equazioni segue, annullando il determinante,
  $$f_x\, g_y - g_x\, f_y = x(x + 2y) - y^2 = 0$$
  e, ricavato $x = (1 - y^2)/y$ dalla terza, sostituendo si ottiene
  $$\frac{1-y^2}{y}\left(\frac{1-y^2}{y} + 2y\right) - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y^4 = 1$$

[1] parte sicuramente non vuota... ricordate le proprietá dell'estremo inferiore.

Ne seguono i punti

$$\pm \left\{ y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \qquad x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}} \right\} \tag{1.1}$$

Il minimo é pertanto

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}}\right) = 2(\sqrt{2}-1)$$

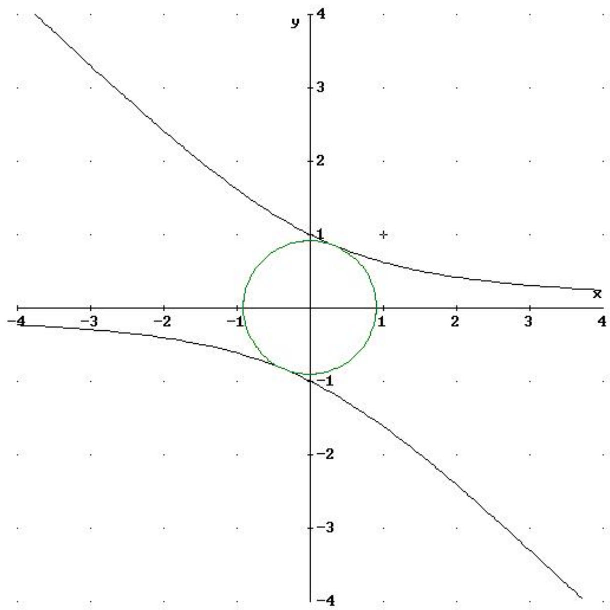

FIGURA 2. La circonferenza $x^2 + y^2 = 2(\sqrt{2}-1)$ tangente all'iperbole.

Il minimo é il valore della funzione f sui due punti determinati dall'algoritmo dei moltiplicatori di Lagrange, vedi formula (1.1).

2. Esercizio

Calcolare il lavoro del campo di forze

$$F = \left\{ \frac{y^2}{x+1}, \; 2y\ln(x+1) + 3x \right\}$$

per compiere un giro dell'ellisse $4x^2 + y^2 = 1$ *in senso antiorario.*

2.1. Soluzione.

Il campo di forze assegnato é definito (e di classe C^∞) nel semipiano

$$x + 1 > 0$$

La curva assegnata é interamente contenuta in tale semipiano

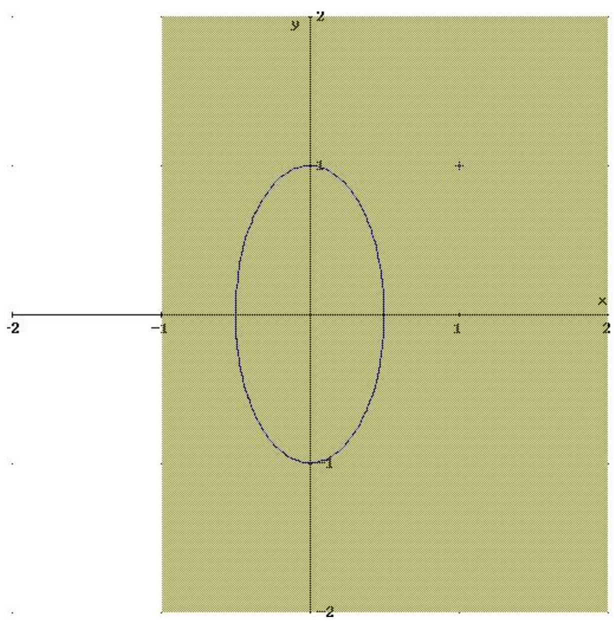

Figura 3. L'ellisse del secondo esercizio e il semipiano $x + 1 > 0$

Si puó quindi calcolare il lavoro richiesto, tenuto conto del verso antiorario di percorrenza, tramite la formula di Stokes

$$\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t} \; ds = \iint_E rot_z(\overrightarrow{F}) \; dxdy$$

Tenuto conto che

$$\mathrm{rot}_z(\overrightarrow{F}) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{y^2}{x+1} & 2y\ln(x+1)+3x & 0 \end{pmatrix} = 3\,\overrightarrow{k}$$

segue

$$\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\ ds = \iint_E 3\,dxdy = 3\,\mathrm{Area}(E) = \frac{3}{2}\pi$$

In altri termini il campo F puó essere pensato come somma dei due campi

$$\overrightarrow{A} = \left\{ \frac{y^2}{x+1},\ \ 2y\ln(x+1) \right\}, \qquad \overrightarrow{B} = \{0,\ \ 3x\}$$

Il primo $\overrightarrow{A}$ ha rotore nullo nel semipiano $x+1>0$, quindi é conservativo e quindi il suo lavoro lungo l'ellisse é nullo. Fra l'altro é facile riconoscere che

$$\overrightarrow{A} = \nabla(y^2\ \ln(1+x))$$

ovvero che $y^2\ \ln(1+x)$ é un potenziale per $\overrightarrow{A}$.

Il secondo, $\overrightarrow{B}$, ha rotore 3, non é conservativo e il suo lavoro lungo l'ellisse vale, tenuto conto della rappresentazione dell'ellisse, con l'orientamento antiorario richiesto,

$$x = \frac{1}{2}\cos(\theta), \quad y = \sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

$$\int_{\partial E} \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{t}\ ds = \int_0^{2\pi} 3\frac{1}{2}\cos^2(\theta)\,d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

come era stato ottenuto tramite la formula di Stokes.

3. Esercizio

- *Calcolare l'area della superficie* Σ *contenuta nel piano* $z = x-1$ *e limitata dal cilindro* $(x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq 1$
- *Calcolare l'integrale superficiale*

$$\int_{\Sigma} \sqrt{(x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2}\; d\sigma$$

3.1. Soluzione.

- $$\text{Area}(\Sigma) = \iint_{(x-2)^2+\frac{1}{2}y^2\leq 1} \sqrt{1+(x-1)_x^2+(x-1)_y^2}\; dxdy =$$

$$= \sqrt{2} \iint_{(x-2)^2+\frac{1}{2}y^2\leq 1} dxdy = \sqrt{2}\,\pi\,\sqrt{2} = 2\pi$$

  avendo tenuto conto che la regione $(x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq 1$ é delimitata da un'ellisse di semiassi 1 e $\sqrt{2}$, e quindi di area $\pi\sqrt{2}$.

- $$\int_{\Sigma} \sqrt{(x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2}\; d\sigma = \sqrt{2} \iint_{(x-2)^2+\frac{1}{2}y^2\leq 1} \sqrt{(x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2}\; dxdy$$

  un ovvio cambiamento di variabile $\xi = x-2, \quad y/\sqrt{2} = \eta$ traduce il precedente integrale in

$$2 \iint_{\xi^2+\eta^2\leq 1} \sqrt{\xi^2+\eta^2}\; d\xi\, d\eta$$

  avendo tenuto conto dello jacobiano della trasformazione

$$dx\, dy = \sqrt{2}\; d\xi\, d\eta.$$

  L'ultimo integrale si calcola ovviamente in coordinate polari

$$2 \iint_{\xi^2+\eta^2\leq 1} \sqrt{\xi^2+\eta^2}\; d\xi\, d\eta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2\, d\rho = 2.2\pi.\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

Osservazione 3.1. *La funzione integranda nell'integrale superficiale richiesto prende valori compresi tra 0 e 1: l'integrale é venuto, infatti, un po' meno dell'area di* Σ :

$$\frac{4}{3}\pi < 2\pi,$$

come il teorema della media lasciava prevedere...!

4. Esercizio

Sia S il solido formato dal cilindro $x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$ sormontato dalla semisfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1, \quad z \geq 1$, e sia

$$\overrightarrow{F} = \{xy,\ xy,\ (1-x-y)\,z\}$$

Calcolare il flusso

$$\int_{\partial S} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma$$

essendo ∂S la frontiera di S e $\overrightarrow{\nu}$ il versore normale esterno.

4.1. Soluzione.

Il teorema della divergenza riconosce che

$$\int_{\partial S} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iint_S \operatorname{div}(\overrightarrow{F})\, dx\, dy\, dz$$

da cui, tenuto conto che

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = y + x + (1 - x - y) = 1$$

si ricava

$$\int_{\partial S} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iint_S dx\, dy\, dz = \text{Volume}(S)$$

La semplice geometria di S fa riconoscere che

$$\text{Volume}(S) = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

Quindi il flusso richiesto vale

$$\frac{5}{3}\pi.$$

Il conto richiesto si poteva eseguire anche prescindendo dal teorema della divergenza.
Tenuto conto che la frontiera di S é composta da tre porzioni di superficie

- la base sul piano $z = 0$,
- la superficie laterale del cilindro,
- la semisfera,

che ciascuna di esse ha, rispettivamente le seguenti parametrizzazioni

- $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$, $\quad z = 0$, $\rho \in [0, 1]$, $\quad \theta \in [0, 2\pi]$
- $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$, $\quad z = t$, $\theta \in [0, 2\pi] \quad t \in [0, 1]$
- $x = \sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = \sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = 1 + \sin(\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi/2], \theta \in [0, 2\pi]$

che il versore normale esterno é su ciascuna delle tre parti rispettivamente il seguente

- $\nu = \{0, 0, 1\}$
- $\nu = \{\cos(\theta), \sin(\theta), 0\}$
- $\nu = \{\sin(\varphi)\cos(\theta),\ \sin(\varphi)\sin(\theta),\ \cos(\varphi)\ \}$

che i tre integrali doppi del prodotto scalare $F \times \nu$ sono

- 0 (il primo, quello sul cerchio base)
- $\int_0^1\, dt \int_0^{2\pi} \{\cos^2(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin^2(\theta)\}d\theta = 0$
- il terzo integrale
  - $F \times \nu = \sin^3(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta)[\cos(\theta) + \sin(\theta)]+$
    $+ [1 - \sin(\varphi)(\cos(\theta) + \sin(\theta))](1 + \cos(\varphi))\cos(\varphi)$
  - $d\sigma = \sin(\varphi)d\varphi\, d\theta$
  - tutti gli addendi che contengono $\sin(\theta)$ o $\cos(\theta)$ producono integrale nullo su $[0, 2\pi]$.
  - resta pertanto solo

$$2\pi \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(\varphi))\cos(\varphi)d\varphi = 5\pi/3$$

  cioé il risultato ottenuto (piú rapidamente) servendosi del teorema della divergenza.