Analisi Vettoriale - A.A. 2003-2004
Foglio di Esercizi n. 8

Soluzioni

1. Esercizio

Dire se le funzioni

$$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}, \quad \frac{e^x-1}{x^2}, \quad \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

sono integrabili in senso classico o improprio negli intervalli $[0,1]$ *e* $(0,+\infty)$.

Soluzione:

- $$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}$$
  É continua in $[0,1]$, esiste infatti il limite per $x \to 0$: quindi l'integrale in tale intervallo esiste in senso classico. Si maggiora, da $x \geq 1$ in poi con
  $$\frac{1}{1+x^2}$$
  quindi esiste l'integrale, in senso improprio su $(0,+\infty)$.
- $$\frac{e^x-1}{x^2}$$
  Tenuto conto che
  $$e^x-1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + ...$$
  si ha
  $$\frac{e^x-1}{x^2} = \frac{1}{x} + \{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + ...\}$$
  ovvero
  $$\frac{e^x-1}{x^2} = \frac{1}{x} + \varphi(x)$$
  avendo indicato con $\varphi(x)$ la somma, continua, della serie a secondo membro.

  Tenuto conto che $\varphi(x)$ é integrabile su $[0,1]$ mentre $\frac{1}{x}$ non lo é se ne conclude che la funzione assegnata non é integrabile su $[0,1]$

Per quanto concerne l'integrale su $(0, +\infty)$ é evidente che non esiste in quanto abbiamo giá riconosciuto la divergenza sul solo primo tratto $(0, 1)$.

Tenuto conto, anche indipendentemente da quanto studiato su $(0, 1)$, che la funzione assegnata

$$\frac{e^x - 1}{x^2}$$

diverge per $x \to \infty$ (l'esponenziale a numeratore infatti diverge com'é noto piú della potenza x^2 a denominatore) si riconosce nuovamente che non esiste l'integrale improprio su $(0, +\infty)$.

- $$\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

Il fattore

$$\frac{\sin(x)}{x}$$

é limitato da 1 e quindi

$$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

condizione sufficiente a riconoscere l'integrabilitá della funzione assegnata su $[0, 1]$ Per quanto concerne $(0, +\infty)$ osserviamo che,

$$(0, +\infty) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

su $(0, 1)$ l'integrale improprio é stato giá studiato.

Per $x \geq 1$ riesce

$$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{|x|^{3/2}}$$

circostanza anche questa sufficiente a riconoscere, la esistenza dell'integrale improprio su $(1, +\infty)$.

Quindi esiste l'integrale improprio su $(0, +\infty)$.

2. Esercizio

Dimostrare che la funzione

$$x^\beta e^{-x}$$

è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(1, +\infty)$ *per ogni* $\beta \in \mathbb{R}$ *e calcolare l'integrale per* $\beta = 0, 1, 2$.

Soluzione:

La funzione esponenziale

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \frac{1}{m!}x^m + \dots$$

verifica, per ogni $x \geq 0$ la diseguaglianza

$$e^x \geq \frac{1}{m!}x^m$$

qualunque il naturale m.
Pertanto

$$x^\beta e^{-x} = \frac{x^\beta}{e^x} \leq m! \frac{1}{x^{m-\beta}}$$

stima quest'ultima sufficiente per

$$m - \beta > 1$$

a riconoscere l'esistenza dell'integrale improprio su $(1, +\infty)$.
I valori richiesti sono

$$\begin{cases} \int_1^a e^{-x}dx & = 1 - e^{-a} & \to & 1, \\ \int_1^a x\, e^{-x}dx & = 1 - \frac{1+a}{e^a} & \to & 1, \\ \int_1^a x^2\, e^{-x}dx & = 2 - \frac{2+2\,a+a^2}{e^a} & \to & 2. \end{cases}$$

3. Esercizio

Dire per quali $\beta > 0$ esiste l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^\beta x}\, dx$$

In questi caso si applichi la definizione calcolando quando possibile anche l'integrale improprio.

Soluzione:

La funzione integranda

$$f(x) = \frac{1}{x \log^\beta (x)}$$

é positiva su $(2, +\infty)$: pertanto per decidere se l'integrale improprio esiste basta esaminare se esiste il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_2^t \frac{1}{x \log^\beta (x)} dx$$

Il calcolo é facile:

- se $\beta \neq 1$ riesce
$$\int_2^t \frac{1}{x\log^\beta x}dx = \frac{1}{1-\beta}\left\{(\log(t))^{1-\beta} - (\log(2))^{1-\beta}\right\}$$
- se $\beta = 1$ riesce
$$\int_2^t \frac{1}{x\log x}dx = \log(\log(t)) - \log(\log(2))$$

Pertanto nel primo caso si ha convergenza solo se $\beta > 1$, mentre nel secondo caso non c'é convergenza.
Riassumendo l'integrale improprio richiesto esiste se e solo se $\beta > 1$.
Per tali valori β legittimi l'integrale vale, ovviamente,
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-\beta}\left\{(\log(t))^{1-\beta} - (\log(2))^{1-\beta}\right\} = \frac{(\log(2))^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

4. Esercizio

Verificare che esiste l'integrale improprio
$$\int_{-1}^1 \sin(\frac{1}{x})dx$$
e determinarne il valore.

Soluzione:

L'integrale richiesto corrisponde all'esistenza dei due integrali impropri
$$\int_{-1}^0 \sin(\frac{1}{x})dx, \quad \int_0^1 \sin(\frac{1}{x})dx$$
Essi esistono entrambi tenuto conto che la funzione integranda é limitata
$$\left|\sin(\frac{1}{x})\right| \leq 1$$
condizione sufficiente all'esistenza dell'integrale improprio di una funzione continua all'interno dell'intervallo assegnato.
Riesce quindi:
$$\int_{-1}^1 \sin(\frac{1}{x})dx = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_{-1}^{-1/n} \sin(\frac{1}{x})dx + \int_{1/n}^1 \sin(\frac{1}{x})dx\right\} = 0$$
avendo tenuto conto che, essendo $\sin(1/x)$ funzione dispari riesce
$$\int_{-1}^{-1/n} \sin(\frac{1}{x})dx = -\int_{1/n}^1 \sin(\frac{1}{x})dx$$

5. Esercizio

Dire se è integrabile in senso improprio la funzione $\log(x^2+y^2)$ nell'insieme $B(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2<1\}$. Se integrabile. si calcoli esplicitamente tale integrale improprio.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione integranda diverge nell'origine.
Tenuto conto tuttavia che

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \log(t) = 0, \quad \forall\alpha>0$$

se ne deduce che

$$|t^\alpha \log(t)| \le M \quad \leftrightarrow \quad |\log(t)| \le \frac{M}{|t|^\alpha}$$

ovvero

$$|\log(x^2+y^2)| \le M \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

diseguaglianza che, scelto $\alpha<1$ é sufficiente a garantire l'esistenza dell'integrale doppio improprio.
Il valore di tale integrale corrisponde pertanto al limite

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{B_n} \log(x^2+y^2)dxdy, \quad B_n : \sqrt{\frac{i}{n}} \le x^2+y^2 \le 1$$

Il calcolo di ciascun integrale sulle corone circolari scelte si esegue tramite le coordinate polari

$$\iint_{B_n} \log(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{1/n}}^1 \log(\rho^2)\rho d\rho = 4\pi \int_{\sqrt{1/n}}^1 \log(\rho)\rho d\rho$$

Eseguiti i calcoli riesce

$$\iint_{B_n} \log(x^2+y^2)dxdy = 4\pi \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{1}{2n}[\log(1/\sqrt{n}) - \frac{1}{2}] \right\} \quad \to \quad -\pi$$

6. Esercizio

Dire per quali $\beta > 0$ esiste l'integrale improprio

$$\int\int_{R^2} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^\beta}\, dx\, dy$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione integranda, continua in tutto R^2, verifica la diseguaglianza

$$\frac{1}{1+(x^2+y^2)^\beta} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^{2\beta}}$$

dalla quale segue l'esistenza dell'integrale improprio non appena

$$2\beta > 2$$

ovvero $\beta > 1$.
Per $\beta = 1$ l'integrale diverge, infatti gli integrali sui cerchi di centro l'origine e raggio $\rho = n$ danno, come valori

$$2\pi \int_0^n \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho = \pi \log(1+n^2) \to \infty$$

ovviamente divergente.
Le funzioni costruite su valori $\beta < 1$ sono addirittura maggiori di quella relativa a $\beta = 1$; se diverge l'integrale di questa figuriamoci come divergeranno quelli per $\beta < 1$...

7. Esercizio

Dire per quali β esiste l'integrale doppio improprio

$$\int\int_C \frac{(x-y)^3}{(x^2+y^2)^\beta}, \quad C = \{x^2+y^2 \leq 1\}$$

e, per i β possibili, calcolare l'integrale.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione integranda $f(x,y)$ soddisfa, indicato con $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ la diseguaglianza

$$|f(x,y)| \leq M \frac{\rho^3}{\rho^{2\beta}}$$

da cui si riconosce l'esistenza dell'integrale doppio improprio se

$$2\beta - 3 < 2, \quad \leftrightarrow \quad \beta < \frac{5}{2}$$

Per tali valori β leciti esiste l'integrale doppio improprio e vale 0 per le evidenti proprietá dispari della $f(x, y)$ al di sopra e al di sotto della retta $x - y = 0$ che divide il cerchio assegnato in due semicerchi.
Se $\beta > \frac{5}{2}$ l'integrale improprio di $|f(x, y)|$ diverge come si riconosce lavorando sulle corone circolari

$$B_n : \sqrt{\frac{1}{n}} < x^2 + y^2 \leq 1$$

Gli integrali cui si perviene, servendosi delle coordinate polari sono infatti

$$\int_0^{2\pi} |\cos(\theta) - \sin(\theta)|^3 d\theta \int_{\sqrt{1/n}}^1 \rho^{4-2\beta} d\rho =$$

$$= \frac{1}{5 - 2\beta} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{5-2\beta} - 1 \right\} \int_0^{2\pi} |\cos(\theta) - \sin(\theta)|^3 d\theta$$

nei quali é evidente la divergenza del termine

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{5-2\beta}$$

Il caso $\beta = \frac{5}{2}$ diverge anch'esso: nell'integrazione in luogo delle potenze precedenti spunta un logaritmo...