Analisi vettoriale - A.A. 2003/04

Foglio di esercizi n.7

$\boxed{\textbf{Soluzioni}}$

1. Esercizio

Studiare la convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+3)!}{(2n)!} x^n \ , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3(x-\sqrt{2})^n}{\log{(n+1)}} \ .$$

1.1. Soluzione.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+3)!}{(2n)!} x^n \tag{1}$$

Serviamoci del criterio del rapporto

$$\left| \frac{\frac{2^n (n+3)!}{(2n)!} x^n}{\frac{2^{n-1}(n+2)!}{(2n-2)!} x^{n-1}} \right| = |x| \frac{n+3}{n(2n-1)} \quad \rightarrow \quad 0 \quad \forall x \in R$$

Quindi la serie converge (1) assolutamente per ogni x, e quindi converge per ogni x.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3(x-\sqrt{2})^n}{\log{(n+1)}} \tag{2}$$

Si tratta, posto

$$y = x - \sqrt{2},$$

della serie di potenze in y

$$3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{\log{(n+1)}}$$

Per riconoscere dove converge serviamoci ancora del criterio del rapporto

$$\left| \frac{\frac{y^n}{\log(n+1)}}{\frac{y^{n-1}}{\log(n)}} \right| = |y| \frac{\log(n+1)}{\log(n)} \quad \rightarrow \quad |y|$$

Ne segue che la serie converge assolutamente in ogni $y \in (-1, 1)$.

La serie originale (2) pertanto converge assolutamente e quindi converge per

$$x \in (-1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$$

Estremi di tale intervallo

- $x = -1+\sqrt{2}$ la serie diventa
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$$
serie che rientra nel caso delle serie a termini di segno alterno, decrescenti in modulo a 0, considerate dal Teorema di Leibnitz [1], e riconosciute convergenti.
- $x = 1+\sqrt{2}$ la serie diventa
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$$
che é una maggiorante della serie armonica
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$
serie divergente. Pertanto la serie assegnata in tale estremo destro é divergente anch'essa.

2. Esercizio

Studiare l'insieme di convergenza della somma di serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+3}(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3}(x-1)^n \ .$$

2.1. Soluzione.

Indicato come sopra con

$$y = x-1$$

la somma assegnata si scrive come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n+3} y^n \tag{3}$$

[1] Criterio di Leibnitz, Vol. I pag. 514.

Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\left|\frac{\frac{2^n+3^n}{n+3}y^n}{\frac{2^{n-1}+3^{n-1}}{n+2}y^{n-1}}\right| = |y|\frac{2^n+3^n}{2^{n-1}+3^{n-1}}\frac{n+2}{n+3} = 3|y|\ \frac{(2/3)^n+1}{(2/3)^{n-1}+1}\ \frac{n+2}{n+3}$$

espressione che, per $n \to +\infty$ tende a $3|y|$.
La serie somma (3) assegnata converge assolutamente e quindi converge per $3|y| < 1$ ovvero

$$y \in (-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3})$$

ovvero ancora per

$$x \in (\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{3})$$

Estremi di tale intervallo

- $x = \frac{2}{3}$ la prima serie delle due serie addendi converge ovviamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}(\frac{-1}{3})^n$$

  la seconda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+3}$$

  converge anch'essa per il Teorema di Leibnitz sul caso dei segni alterni.

  Quindi la serie somma in tale estremo sinistro converge.
- $x = \frac{4}{3}$ la prima delle due serie addendi converge, la seconda no.

  Quindi la serie somma in tale estremo destro non converge.

3. Esercizio

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-nx^2}.$$

3.1. Soluzione.

La serie assegnata é, scritta piú chiaramente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2\, e^{-x^2}\right)^n \tag{4}$$

una serie geometrica costruita su

$$\rho = 2\, e^{-x^2}$$

É quindi ben noto che converge se e solo se $|\rho| < 1$ ovvero se e solo se

$$|2\, e^{-x^2}| < 1 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{\ln(2)} < |x|$$

la semiretta da $-\sqrt{\ln(2)}$ a $-\infty$ e quella da $\sqrt{\ln(2)}$ a $+\infty$.

La convergenza della (4), pensata come serie geometrica in ρ, é uniforme in ogni intervallo chiuso

$$[-a, a]$$

con $a \in (0, 1)$, 1 escluso.
Quindi la serie (4) converge uniformemente in ogni semiretta $(-\infty, -b]$ ovvero $[b, +\infty)$ con

$$b > \sqrt{\ln(2)}$$

4. Esercizio

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{|x|}{4^n}\right) \quad . \tag{5}$$

4.1. Soluzione.

Tenuto conto che

$$|\ln(1 + |a|)| \leq |a|,$$

i termini della serie sono maggiorati in modulo da

$$\ln(1 + \frac{|x|}{4^n}) \leq \frac{|x|}{4^n}$$

In altri termini la serie geometrica convergente

$$|x|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

é una maggiorante della serie dei moduli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\log\left(1+\frac{|x|}{4^n}\right)\right|,$$

pertanto la serie assegnata é convergente qualunque sia x.

4.2. La convergenza uniforme. Detta $S(x)$ la somma della (5) riesce

$$\left|S(x)-\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{|x|}{4^k}\right)\right|\le|x|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

Indicato con

$$\varepsilon_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

resto n-esimo di una serie numerica convergente, e quindi infinitesimo per $n\to+\infty$ si ha

$$\left|S(x)-\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{|x|}{4^k}\right)\right|\le\varepsilon_n|x| \tag{6}$$

Se $x\in[-M,M]$, intervallo limitato, allora la quantitá a secondo membro di (6) si maggiora, per tutti tali x con

$$M\varepsilon_n$$

Quindi la serie (5) converge uniformemente in ogni intervallo limitato.

5. Esercizio

Siano

$$f_n(x) = n(e^{\frac{x}{n}} - 1), \quad n = 1, 2, ...$$

si calcoli $f(x)$, limite puntuale della successione di funzioni in $\mathbb{R}$ e si dica se tale convergenza è uniforme negli insiemi $[0,1]$ e $[0,+\infty[$.

5.1. Soluzione.

Consideriamo prima di tutto il caso di $x = 0$: tutte le f_n in tale punto valgono 0 e quindi

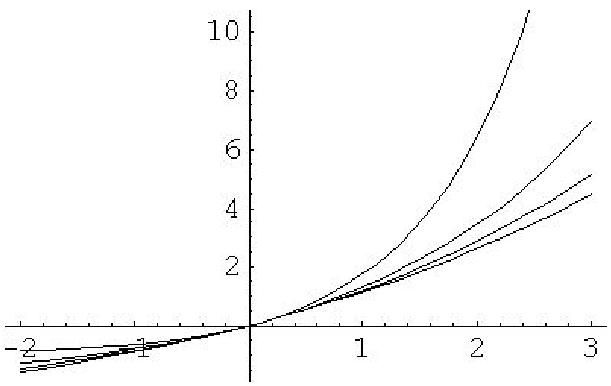

FIGURA 1. La successione $f_n(x)$ dell'esercizio 5.

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$$

Negli altri punti $x \neq 0$ teniamo conto che

$$e^{x/n} - 1 = \frac{x}{n} e^{\tau_n} \tag{7}$$

relazione dedotta semplicemente dal teorema di Lagrange

$$e^a - e^b = (a - b)\, e^{\xi}$$

pensando ad $a = x/n$ e $b = 0$ La (7) produce quindi

$$n(e^{\frac{x}{n}} - 1) = x\, e^{\tau_n}, \quad \tau_n \in (-|x|/n, |x|/n)$$

Tenuto conto che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n} = 0$$

ne segue che anche

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_n = 0$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} x\, e^{\tau_n} = x$$

Riesce quindi

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x$$

5.2. La convergenza uniforme. Consideriamo la differenza

$$f_n(x) - x = n\left(e^{x/n} - 1 - \frac{x}{n}\right)$$

Dalla formula di Taylor si ha del resto

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2\, e^{\tau}$$

che pensando a

$$t = \frac{x}{n}$$

produce

$$e^{x/n} - 1 - \frac{x}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\, e^{\tau_n}$$

ovvero

$$f_n(x) - x = n\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\, e^{\tau_n}$$

Se

$$x \in [-M, M], \quad \to \quad \tau_n \in [-M, M]$$

riesce pertanto

$$|f_n(x) - x| \leq \frac{1}{2n} M^2 e^M$$

Tenuto presente che la quantitá secondo membro non dipende da x ed é un infinitesimo si riconosce che la successione $\{f_n(x)\}$ assegnata converge ad x uniformemente in ogni intervallo limitato.

Quindi

- per $x \in [0, 1]$ la convergenza é uniforme,
- per $x \in [0, +\infty)$ la convergenza non é uniforme.

6. Esercizio

Dopo aver determinato l'insieme di convergenza di

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)x^n}{4^n}\ ,$$

si calcoli l'integrale $\int_0^2 f(x)\,dx$ *.*

6.1. Soluzione.

La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)x^n}{4^n} \tag{8}$$

converge, assolutamente, se

$$\left|\frac{\frac{(n+1)x^n}{4^n}}{\frac{n\,x^{n-1}}{4^{n-1}}}\right| = \left|\frac{x}{4}\right|\ \frac{n+1}{n}\quad\to\left|\frac{x}{4}\right|<1$$

ovvero converge assolutamente per

$$x\in(-4,\,4)$$

e, com'é noto per tutte le serie di potenze, converge uniformemente in ogni intervallo

$$[a,b]\subseteq(-4,\,4)$$

Quindi la serie (8) converge uniformemente in [0, 2] e quindi in tale intervallo riesce

$$\int_0^2 f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)x^k}{4^k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^2\frac{(k+1)x^k}{4^k}dx$$

da cui, calcolando gli integrali

$$\int_0^2 f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=2$$

7. Esercizio

Trovare lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ *e calcolare* $f^{(7)}(0)$.

7.1. Soluzione.

Tenuto presente che

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \quad \forall x \in (-1,1) \tag{9}$$

e tenuto presente che in ogni intervallo chiuso

$$[a,b] \subseteq (-1,\, 1)$$

si puó liberamente derivare termine, si ha anche

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(x-1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k x^{k-1}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

Del resto i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ di una serie di potenze hanno rispetto alla somma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k$$

i seguenti significati, deducibili per derivazione nel punto $x = 0$:

$$\begin{array}{l} a_0 = f(0) \\ a_1 = f'(0) \\ a_2 = \frac{1}{2} f''(0) \\ a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0) \\ \text{ecc.} \end{array}$$

Da tale osservazione si riconosce che, nel caso dell'esercizio,

$$f^{[k]}(0) = k!\, a_k = (k+1)!$$

e quindi

$$f^{[7]}(0) = 8!$$

Le ridotte

$$\sum_{k=0}^{n} k x^{k-1}$$

rappresentano, qualunque sia n, i polinomi di Taylor della funzione $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ di punto iniziale $x_0 = 0$ e ordine $n-1$.

8. Esercizio

Calcolare la somma delle seguenti serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}\ , \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{4n-1}\ .$$

8.1. Soluzione.

$\boxed{\text{Prima serie:}}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((-x)^3\right)^n}{n!} = e^{-x^3}$$

$\boxed{\text{Seconda serie:}}$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{1-x^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{4k} \quad \to \quad \frac{4x^3}{(1-x^4)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} 4k\, x^{4k-1}$$

se ne deduce che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{4n-1} = \frac{1}{4} \frac{4x^3}{(1-x^4)^2}$$