Analisi Vettoriale - A.A. 2003-2004
Foglio di Esercizi n. 6
Soluzioni

1. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione autonoma

$$y' = y(y-1)(y-2)$$

1.1. Soluzione.

$$\int \frac{1}{y(y-1)(y-2)} dy = \int dx$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{y(y-1)(y-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{y-2}$$

ne deriva

$$\frac{1}{2}\ln(|y|) - \ln(|y-1|) + \frac{1}{2}\ln(|y-2|) = x + c$$

da cui segue

$$\frac{\sqrt{|y(y-2)|}}{|y-1|} = Ce^x \quad \rightarrow \quad \frac{|y(y-2)|}{|y-1|^2} = C^2 e^{2x}$$

Da essa segue

$$\begin{array}{ll} y^2 - 2y = C^2 e^{2x}(y-1)^2 & \quad se \quad y(y-2) > 0 \\ -y^2 + 2y = C^2 e^{2x}(y-1)^2 & \quad se \quad y(y-2) < 0 \end{array}$$

Nel primo caso si ha

$$y^2(1 - C^2 e^{2x}) + 2(C^2 e^{2x} - 1)y - C^2 e^{2x} = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - C^2 e^{2x}}}$$

Nel secondo caso si ha

$$y^2(1 + C^2 e^{2x}) - 2(C^2 e^{2x} + 1)y + C^2 e^{2x} = 0 \quad \rightarrow \quad y = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + C^2 e^{2x}}}$$

2. Esercizio

Risolvere i due seguenti problemi di Cauchy, riferiti alla stessa equazione differenziale,

$$\begin{cases} y' = 2(t+1)y^{2/3} \\ y(1) = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y' = 2(t+1)y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2.1. Soluzione.

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili:

- $\boxed{\text{Primo problema}}$

  $$\int \frac{dy}{y^{-2/3}} = \int 2(t+1)dt \quad \to \quad 3y^{1/3} = t^2 + 2t + c$$

  Ne segue

  $$y(t) = \left(\frac{1}{3}(t^2 + 2t + c)\right)^3$$

  La condizione $y(1) = 1$ implica $1 = \left(\frac{1}{3}(1 + 2 + c)\right)^3$ da cui $c = 0$ e quindi la soluzione del primo problema é

  $$y(t) = \left(\frac{1}{3}(t^2 + 2t)\right)^3$$

- $\boxed{\text{Secondo problema}}$ É ancora piú facile: esiste, ovvia la soluzione

  $$y(x) \equiv 0$$

  Sará l'unica ?

2.2. Cerchiamo soluzioni nulle nell'origine.

Si tratta di una ricerca non disperata: infatti, a priori non possiamo escluderne l'esistenza, la funzione

$$2(t+1)y^{2/3}$$

non é infatti di classe C^1 in alcun rettangolo intorno all'origine: il motivo é quella potenza $y^{2/3}$ con esponente minore di 1.
Lavoriamo un po' con le soluzioni dell'equazione nulle per $t = 0$ ma diverse da zero per $t > 0$ (naturalmente eventuali...)

$$\frac{1}{3}y^{-2/3}y' = \frac{2}{3}(t+1) \quad \to \quad \left(y^{1/3}\right)' = \frac{2}{3}(t+1)$$

Integriamo su un intervallo $[\alpha, t]$

$$y^{1/3}(t) - y^{1/3}(\alpha) = \frac{1}{3}[t^2 - \alpha^2 + 2(t - \alpha)]$$

da cui, passando al limite per $\alpha \to 0$ si ha

$$y^{1/3}(t) = \frac{1}{3}[t^2 + 2t]$$

ovvero

$$y(t) = \frac{1}{3^3}(t^2 + 2t)^3$$

Questa funzione, un onestissimo polinomio, é

- non identicamente nulla
- vale 0 per $t = 0$
- verifica l'equazione differenziale, infatti

$$\begin{array}{ll} y'(t) & = 3\left(\frac{1}{3}[t^2+2t]\right)^2 \frac{1}{3}2(t+1) \\ 2(t+1)y^{2/3}(t) & = 2(t+1)\left(\frac{1}{3}[t^2+2t]\right)^2 \end{array}$$

  che i secondi membri siano uguali lo riconosce chiunque !

Trovate il grafico di tale funzione in Figura (1).

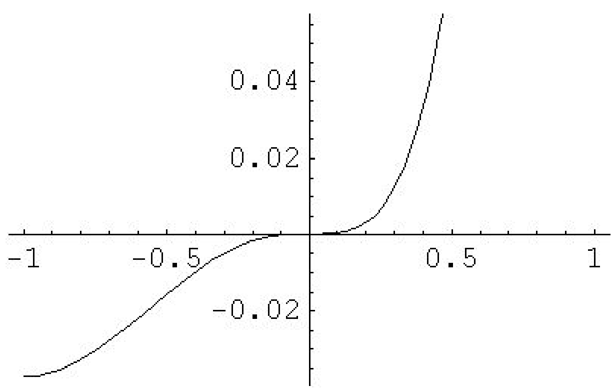

FIGURA 1. Il grafico della (sorprendente) funzione non nulla .

OSSERVAZIONE 2.1. *La funzione sorprendente trovata non é poi tanto sorprendente...*
guardate bene: é la stessa che avevamo trovato nella soluzione del primo problema di Cauchy !

3. Esercizio

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = \frac{y - 4t}{t - y}, \quad y(1) = 2$$

3.1. Soluzione.

Si tratta di un'equazione di tipo omogeneo

$$y' = \frac{y/t - 4}{1 - y/t}, \quad y/t = z, \quad y' = z't + z$$

$$z't = \frac{z^2 - 4}{1 - z}, \quad z(1) = 2 \tag{1}$$

Tenuto conto che $z = 2$ rende nulla l'espressione

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{1 - z},$$

a secondo membro, ne discende che la soluzione del problema (1) é la funzione

$$z(t) \equiv 2$$

Quindi la soluzione $y(t)$ del problema assegnato é $y(t) = 2t$.

4. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y' = -(x + y + 1)^2$$

4.1. Soluzione.

Ricorriamo alla sostituzione

$$x + y + 1 = z \quad \leftrightarrow \quad y = z - 1 - x$$

ne segue

$$z' = 1 - z^2$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+z}dz + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-z}dz = \int dx$$

$$\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = 2x + c$$

ovvero

$$\frac{1+z}{1-z} = Ce^{2x}$$

da cui

$$z = \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}, \quad \rightarrow \quad y = \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1} - 1 - x$$

5. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione $y' + x^2y = 3x^2$

5.1. Soluzione.

- Soluzione dell'omogenea:

$$y' + x^2 y = 0 \quad \rightarrow \quad y_0(x) = C\, e^{-x^3/3}$$

- Soluzione della completa: metodo della variazione delle costanti $\overline{y}(x) = c(x)e^{-x^3/3}$: sostituendo si deve avere

$$c'(x)e^{-x^3/3} = 3x^2 \quad \rightarrow \quad c'(x) = 3x^2 e^{x^3/3} \quad \rightarrow \quad c(x) = 3e^{x^3/3}$$

La soluzione dell'equazione completa cercata é pertanto...

$$\overline{y}(x) = 3e^{x^3/3} e^{-x^3/3} = 3$$

Risultato ampiamente prevedibile a occhio !

L'integrale generale richiesto é pertanto

$$y(x) = 3 + C\, e^{-x^3/3}$$

6. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione di Bernoulli

$$y' - \frac{1}{3} y + y^4 = 0$$

6.1. Soluzione.

Dividiamo per y^4

$$y^{-4} y' - \frac{1}{3} y^{-3} + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(y^{-3}\right)' + y^{-3} - 3 = 0$$

L'equazione lineare associata ponendo $z = y^{-3}$ é la seguente

$$z' + z - 3 = 0$$

il suo integrale generale é

$$z(x) = 3 + Ce^{-x}$$

Tornando alla y si ha quindi

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3 + Ce^{-x}}}$$

7. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare di secondo ordine

$$y'' + 2\,y' + y = \sin(x)$$

7.1. Soluzione.

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea:

- Integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

radici dell'equazione

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Le soluzioni linearmente indipendenti sono

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = x.e^{-x}$$

L'integrale generale dell'omogenea pertanto é

$$y_0(x) = e^{-x}\,(c_1 + c_2 x)$$

- Soluzione dell'equazione completa:

$$\overline{y}(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$$

Sostituendo si deve avere

$$-A\sin(x) - B\cos(x) + 2A\cos(x) - 2B\sin(x) + A\sin(x) + B\cos(x) = \sin(x)$$

ne segue $A = 0, \quad B = -1/2$: l'integrale particolare é pertanto

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{2}\cos(x)$$

L'integrale generale dell'equazione é pertanto

$$y(x) = e^{-x}\,(c_1 + c_2 x) - \frac{1}{2}\cos(x)$$

8. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione di Eulero

$$t^3\,u''' - 4t^2\,u'' + 8\,t\,u' - 8\,u \;=\; 0$$

8.1. Soluzione.

Cerchiamo le soluzioni nella forma di potenze x^λ : l'equazione di terzo grado in λ é la seguente

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-4\lambda(\lambda-1)+8\lambda-8=0$$

equazione che, con un paio di raccoglimenti a fattor comune si fattorizza in

$$(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

cioé

$$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \quad \lambda_3=4$$

L'integrale generale dell'equazione di Eulero assegnata é pertanto

$$y(x)=a\,x+b\,x^2+c\,x^4$$

9. Esercizio

Applicare il metodo delle approssimazioni successive all'equazione

$$y'=1+x\,y^2 \quad y(0)=0$$

determinando le prime tre funzioni approssimanti.

9.1. Soluzione.

(1)

$$y_0(x)=0$$

(2)

$$y_1(x)=\int_0^x[1+t\,y_0(t)]\,dt=\int_0^x 1dt=x$$

(3)

$$y_2(x)=\int_0^x[1+t\,y_1(t)]\,dt=\int_0^x\left[1+t^2\right]dt=x+\frac{1}{3}x^3$$

(4)

$$y_3(x)=\int_0^x[1+t\,y_2(t)]\,dt=\int_0^x\left[1+t\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)\right]dt$$

$$y_3(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{15}x^5$$

9.2. Lavoriamo con *Mathematica*. Si possono definire funzioni in modo ricorsivo, proprio lo strumento adatto alla definizione della successione delle approssimazioni successive.
I comandi necessari sono i seguenti:

```
y[x_, 0] := 0;
y[x_, n_] := Integrate[1 + t*y[t, n - 1], {t, 0, x}]
```

Cosí, ad esempio si possono scrivere un po' di approssimazioni successive

0	0
1	x
2	$x+\frac{x^3}{3}$
3	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}$
4	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}+\frac{x^7}{105}$
5	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}+\frac{x^7}{105}+\frac{x^9}{945}$

I grafici delle prime 10 approssimazioni successive riportati in Figura (2) per $x \in [0,1]$ appaiono meno di 10, tanto sono simili.
L'apparire sovrapposti é la migliore riprova del fatto che convergano...

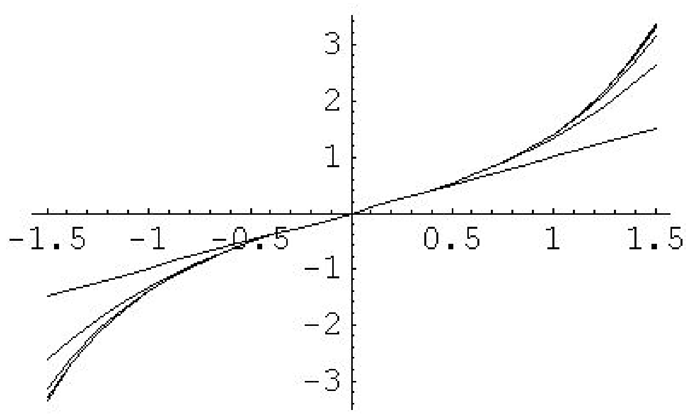

FIGURA 2. I grafici delle prime 10 approssimazioni successive

Osservazione 9.1. *Le approssimazioni successive prodotte, anche con l'aiuto di Mathematica, e riportate nella tabella precedente, hanno l'aspetto di somme parziali di una serie di potenze.*
Chissá se si tratta di una serie di potenze convergente...
Chissá se la sua somma non sia per caso proprio la soluzione che cerchiamo...
Si tratta della serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$$

dando al simbolo

$$(2k+1)!!$$

il significato di prodotto dei numeri dispari da 1 *a* $2k+1$.

10. Esercizio

Determinare la soluzione del problema di Cauchy riferito al sistema

$$\begin{cases} x' = -28x + 10y \\ y' = -75x + 27y \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 5. \end{cases}$$

10.1. Soluzione.

$\boxed{\textbf{Soluzione artigianale:}}$

Cerchiamo l'equazione lineare di secondo ordine che soddisfano le soluzioni del sistema

$$x'' = -28x' + 10(-75x + 27y) = -28x' - 750x + 27(x' + 28x)$$

ovvero

$$x'' + x' - 6x = 0$$

le radici dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ sono

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Quindi la funzione $x(t)$ é combinazione lineare $x(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t}$
Tenuto conto delle condizioni iniziali $x(0) = 2, \quad y(0) = 5$ si ricava, dal sistema $x'(0) = -28.2 + 10.5 = -6$
Ne segue pertanto che le due costanti A e B devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} A + B & = 2 \\ 2A - 3B & = -6 \end{cases}, \quad \rightarrow \quad A = 0, \quad B = 2$$

Quindi riesce:

$$x(t) = 2\,e^{-3t}$$

La determinazione della $y(t)$ é analoga: l'equazione di secondo ordine é la stessa (come accade sempre nel caso omogeneo), quindi anche $y(t)$ si esprime con

$$y(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t}$$

Le condizioni iniziali per la $y(t)$ sono: $y(0) = 5$ e, di conseguenza dal sistema $y'(0) = -75.2 + 27.5 = -15$.
Il sistema per A e B é pertanto

$$\begin{cases} A + B & = 5 \\ 2A - 3B & = -15 \end{cases}, \quad \to \quad A = 0, \quad B = 5$$

Quindi riesce:

$$y(t) = 5\,e^{-3t}$$

$\boxed{\textbf{Soluzione vettoriale:}}$

Indicata con A la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} -28 & 10 \\ -75 & 27 \end{pmatrix}$$

calcoliamone

- autovalori

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3$$

- autovettori corrispondenti

$$\{1, 3\},\ \{2, 5\},$$

Integrale generale:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Il problema di Cauchy richiesto ha pertanto soluzione

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \to \quad \alpha = 0, \beta = 1$$

quindi:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

ovviamente la stessa coppia di funzioni $x(t)$ e $y(t)$ trovata precedentemente.