**Analisi Vettoriale - A.A. 2003-2004**
Foglio di Esercizi n. 5

## 1. Esercizio

*Determinare l'integrale generale di*

$$y^{[17]} + y^{[15]} = 0$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$
Posto $y^{[15]} = z$ l'equazione proposta diventa

$$z'' + z = 0$$

Il cui integrale generale é

$$z(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$$

Per determinare l'integrale generale dell'equazione proposta occorre pertanto risolvere l'equazione differenziale

$$y^{[15]} = A\cos(x) + B\sin(x) \tag{1}$$

Tenuto conto che

$$\cos''(x) = -\cos(x), \quad \cos^{[4]}(x) = \cos(x), \quad ...\cos^{[16]}(x) = \cos(x)$$

e analogamente

$$\sin''(x) = -\sin(x), \quad \sin^{[4]}(x) = \sin(x), \quad ...\sin^{[16]}(x) = \sin(x)$$

ovvero anche, integrando una volta,

$$\cos^{[15]}(x) = \sin(x), \quad \sin^{[15]}(x) = -\cos(x)$$

L'integrale generale della (1) é pertanto

$$y(x) = -A\sin(x) + B\cos(x) + \sum_{k=0}^{1} 4a_k x^k$$

che rappresenta, con le sue 17 costanti arbitrarie l'integrale generale dell'equazione assegnata nell'esercizio.

## 2. Esercizio

*Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$y'' - 4y' + 4y = x^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$

Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$\boxed{\textbf{1.}}$ si trovano le due soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea (polinomio caratteristico $(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \to \quad \lambda = 2$ molteplicitá 2) $e^{2x}, \quad xe^{2x}$

L'integrale generale dell'omogenea é pertanto

$$y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ si trova una soluzione della completa (anche per prove partendo da un generico $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ )

$$(Ax^2 + Bx + c)'' - 4(Ax^2 + Bx + c)' + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 \quad \to$$
$$\to \quad 2A - 8Ax - 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = x^2$$

che implica

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{3}{8}$$

Una soluzione dell'equazione completa é pertanto

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ L'integrale generale dell'equazione completa é pertanto

$$y(x) \ = \ \frac{3}{8} - \frac{3\,e^{2\,x}}{8} + \left(\frac{1}{2} + \frac{5\,e^{2\,x}}{4}\right) x + \frac{x^2}{4}$$

## 3. Esercizio

*Risolvere il problema* $y''' - y' = 4\,e^{-x} + 3\,e^{2x}, \quad y(0) = 0,$ $y'(0) = -1, \quad y''(0) = 2.$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$ Si tratta di un'equazione differenziale lineare di ordine 3, non omogenea a coefficienti costanti.

L'equazione caratteristica associata é

$$\lambda^3 - \lambda = 0, \quad \to \quad \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = -1$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata é pertanto

$$y_0(x) = c_1\, e^{\lambda_1\, x} + c_2\, e^{\lambda_2\, x} + c_3\, e^{\lambda_3\, x} = \; c_1 + c_2\; e^{x} + c_3\; e^{-x}$$

Una soluzione dell'omogenea si trova pensando separatamente alle due equazioni

$$\begin{aligned} y''' - y' &= 4\, e^{-x}, \\ y''' - y' &= 3\, e^{2x}, \end{aligned}$$

Entrambe hanno a secondo membro funzioni particolarmente semplici:

- per la prima, tenuto conto che $e^{-x}$ é soluzione dell'omogenea si potrá cercare una soluzione della completa nella forma

  $$\overline{y}_1(x) == A\; x\; e^{-x}$$

  Sostituendo si *deve avere*

  $$2Ae^{-x} \;=\; 4\, e^{-x} \quad \rightarrow \quad A = 2, \quad \rightarrow \quad \overline{y}_1(x) = 2\; x\; e^{-x}$$

- per la seconda, tenuto conto che $e^{2x}$ non é soluzione dell'omogenea si potrá cercare una soluzione della completa nella forma

  $$\overline{y}_2(x) == A\; e^{2x}$$

  Sostituendo si *deve avere*

  $$6Ae^{2x} = 3\, e^{2x}, \quad \rightarrow \quad A = 1/2 \quad \rightarrow \quad \overline{y}_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

L'integrale generale dell'equazione completa é pertanto

$$y(x) = \; c_1 + c_2\; e^{x} + c_3\; e^{-x} + 2\; x\; e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato si ottiene determinando opportunamente le tre costanti libere $c_1$, $c_2$, $c_3$

$$\begin{array}{lcr} y(x) = \; c_1 + c_2\; e^{x} + c_3\; e^{-x} + 2\; x\; e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} & \Rightarrow & y(0) = c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{2} = 0 \\ y'(x) = c_2 e^{x} - c_3 e^{-x} + 2e^{-x} - 2xe^{-x} + e^{2x} & \Rightarrow & y'(0) = c_2 - c_3 + 3 = -1 \\ y''(x) = c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} - 4e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{2x} & \Rightarrow & y''(0) = c_2 + c_3 - 2 = 2 \end{array}$$

Ne segue

$$c_1 = -\frac{9}{2}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 4$$

La soluzione pertanto é

$$y(x) = \; -\frac{9}{2} + 4\; e^{-x} + 2\; x\; e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

### 4. Esercizio

*Risolvere per $\alpha \in R$ il seguente problema di Cauchy*

$$y'' + \alpha^2 y = x + 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$ Se $\alpha \neq 0$ l'integrale generale é il seguente

$$y(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2}(x+1)$$

e quindi per soddisfare le condizioni iniziali

$$A = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B = -\frac{1}{\alpha^3}$$

Se invece $\alpha = 0$ l'equazione diventa

$$y'' = x + 1, \quad \rightarrow y(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

### 5. Esercizio

*Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y''' + y'' = xe^{-x}.$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$ Si tratta di un'equazione che puó essere pensata come lineare di I ordine nell'incognita $z = y''$

$$z' + z = xe^{-x} \quad \rightarrow \quad z(x) = (c + \frac{1}{2}x^2)e^{-x}$$

A questo punto c'é da fare

- due primitive:

$$y'(x) = \int \left( (c + \frac{1}{2}x^2)e^{-x} \right) dx = -(1 + c + x + \frac{x^2}{2})e^{-x} + a$$

$$y(x) = -\int \left\{ (1 + c + x + \frac{x^2}{2})e^{-x} + a \right\} dx = (3+c+2\,x+\frac{x^2}{2})e^{-x}+a\,x+b$$

- oppure calcolare direttamente l'integrale

$$\int_0^x (x-t)(c + \frac{1}{2}t^2)\, e^{-t}\, dt = -3 - \, c + \, x + \, c\,x + \frac{6 + 2\,c + 4\,x + x^2}{2\,e^x}$$

  che fornisce (vedi paragrafo *Primitive di ordine superiore*) la doppia primitiva cercata alla quale aggiungere un generico polinomio di primo grado $ax + b$.

## 6. Esercizio

*Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}.$$

**Soluzione** L'equazione é definita in tutti gli (infiniti) intervalli in cui $\cos(x) \neq 0$ :
Supponiamo, per semplicitá di lavorare in un intervallo in cui $\cos(x) > 0$

- Soluzione omogenea associata
$$y'' + y = 0 \quad \to \quad y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$
- Soluzione dell'equazione completa : metodo della variazione delle costanti, cerchiamo la soluzione tra le funzioni seguenti
$$\overline{y}(x) = c_1(x) \cos(x) + c_2(x) \sin(x)$$
imponendo che:
$$\begin{cases} c_1'(x) \cos(x) + c_2'(x) \sin(x) & = 0 \\ -c_1'(x) \sin(x) + c_2'(x) \cos(x) & = \frac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$
da cui
$$c_1'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad c_2'(x) = 1$$
da cui ancora
$$c_1(x) = \ln(|\cos(x)|), \quad c_2(x) = x$$
Una soluzione della completa é pertanto
$$\ln(\cos(x)) \cos(x) + x \sin(x)$$
- La soluzione generale dell'equazione é pertanto

$$y(x) = \ln(\cos(x)) \cos(x) + x \sin(x) + c_1(x) \cos(x) + c_2(x) \sin(x)$$

Una soluzione dell'equazione completa poteva essere ottenuta direttamente, con lo stesso sforzo, con la formula

$$u(x) = \int_0^x \sin(x - \xi) \frac{1}{\cos(\xi)} \, d\xi$$

caso particolare per $k = 1$ della

$$u(x) = \frac{1}{k} \int_0^x \sin(k(x - \xi)) \, f(\xi) \, d\xi$$

che fornisce una soluzione dell'equazione $y'' + k^2 y = f(x)$. (Vedi Courant, Vol. II, pag 695)

## 7. Esercizio

*Assegnata l'equazione*

$$y'' + y = f(x)$$

- *Indicare servendosi dell'espressione integrale (cfr. Courant, Vol. II pag. 695) una soluzione dell'equazione completa*
- *Determinare una soluzione dell'equazione completa nel caso*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \textit{se} \quad |x| \leq 1 \\ \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases} .$$

**Soluzione**

- L'espressione é la seguente

$$y(x) = \int_0^x \sin(x - \xi)\, f(\xi)\, d\xi \qquad (2)$$

- Nel caso particolare della funzione a supporto compatto assegnata

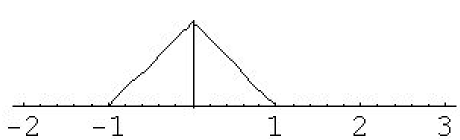


FIGURA 1. La funzione $f(x)$ assegnata.

L'espressione (2) diventa in questo caso la seguente

$$\begin{array}{lll}
x \leq -1 & \int_0^{-1} \sin(x-\xi)\,(1+\xi)\,d\xi & = -\cos(x) - \sin(x) + \sin(1+x) \\[2ex]
-1 \leq x \leq 0 & \int_0^{x} \sin(x-\xi)\,(1+\xi)\,d\xi & = 1 + x - \cos(x) - \sin(x) \\[2ex]
0 \leq x \leq 1 & \int_0^{x} \sin(x-\xi)\,(1-\xi)\,d\xi & = 1 - x - \cos(x) + \sin(x) \\[2ex]
x \geq 1 & \int_0^{1} \sin(x-\xi)\,(1-\xi)\,d\xi & = -\cos(x) + \sin(1-x) + \sin(x)
\end{array}$$

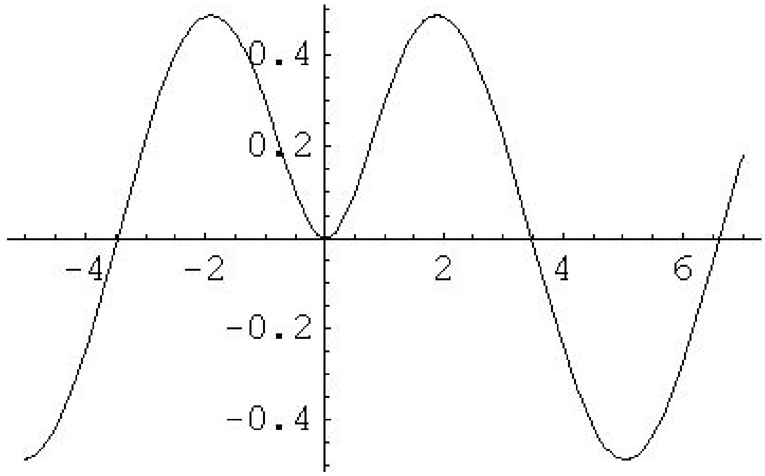


FIGURA 2. La soluzione trovata

OSSERVAZIONE 7.1. *La formula (cfr. Courant, Vol. II pag. 695) usata produce una funzione che soddisfa anche le condizioni iniziali*

$$\overline{y}(0) = 0, \quad \overline{y}'(0) = 0$$

*riconoscete il fatto guardando la Figura 2.*

## 8. Esercizio

*Integrale generale di* $x\,y'' - y' = 3\,x^2$

**Soluzione**

Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti variabili.

- L'omogenea associata

$$x\,y'' - y' = 0$$

puó essere risolta ponendo $y' = z$ e quindi studiando l'equazione lineare omogenea di primo ordine

$$xz' - z = 0 \quad \to \quad z' = \frac{1}{x}z \quad \to \quad z(x) = c\,x$$

Ne segue quindi

$$y(x) = \frac{1}{2}\,c\,x^2 + b$$

espressione (ovviamente) equivalente a $y(x) = c\,x^2 + b$.

- Una soluzione dell'equazione completa puó essere cercata per tentativi mediante polinomi

$$\overline{y}(x) = A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x + D:$$

sostituendo si deve avere

$$3\,A\,x^2 - C = 3\,x^2, \quad \rightarrow \quad A = 1, \quad C = 0$$

e quindi $\overline{y}(x) = x^3$
- L'integrale generale richiesto é pertanto

$$y(x) = x^3 + \ c\,x^2 + b$$

## 9. Esercizio

*Integrale generale dell'equazione di Eulero* $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare di ordine 2 non omogenea.
L'equazione omogenea associata

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

é del tipo di Eulero: sue soluzioni possono essere trovate nella forma $y(x) = x^\lambda$
Sostituendo si *deve avere*

$$(\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2)x^\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 = 0$$

da cui $\lambda = 2$ oppure $\lambda = 1$
Le due funzioni $x$ e $x^2$ sono (ovviamente linearmente indipendenti) soluzioni dell'omogenea e l'integrale generale dell'omogenea é

$$y(x) = A\,x + B\,x^2$$

Una soluzione dell'equazione completa puó essere cercata come polinomio $\overline{y}(x) = A\,x^3$: sostituendo si *deve avere* $2A = 1$ da cui

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{2}\,x^3$$

L'integrale generale dell'equazione é pertanto

$$y(x) = \frac{1}{2}\,x^3 + B\,x^2 + A\,x$$

## 10. Esercizio

*Integrale generale di* $y'' - 2xy' - 2y = 0$ *sapendo che* $e^{x^2}$ *é soluzione.*

**Soluzione**

L'equazione assegnata é lineare di secondo ordine omogenea a coefficienti variabili: l'informazione che $y_1(x) = e^{x^2}$ é una sua soluzione ci autorizza a cercare un'altra soluzione $y_2(x)$ nella forma

$$A(x)e^{x^2}$$

sostituendo si *deve avere*

$$\left(A(x)e^{x^2}\right)'' - 2x\left(A(x)e^{x^2}\right)' - 2\left(A(x)e^{x^2}\right) = 0$$

ovvero

$$e^{x^2}\left\{(A'' + 4xA' + 2A + 4x^2A) - 2x((A' + 2Ax) - 2A\right\} = 0$$

ovvero ancora

$$A'' + 2xA' = 0, \quad \to \quad A'(x) = e^{-x^2} \quad \to \quad A(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Un'altra soluzione dell'equazione assegnata é pertanto

$$y_2(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

L'integrale generale é pertanto

$$y(x) = e^{x^2}\left\{c_1 + c_2\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right\}$$

*18 novembre 2003*