Analisi Vettoriale - A.A. 2003-2004
Foglio di Esercizi n. 4
Soluzioni

1. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale $y' = y\sin(y)$ *disegnare, in modo qualitativo, i grafici delle soluzioni.*

Soluzione

Si tratta di un'equazione autonoma: $f(y) = y\ \sin(y)$ dipende solo da y.

$$y\ \sin(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = k\,\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Quindi le funzioni costanti

$$y(x) \equiv k\,\pi$$

sono soluzioni d'equilibrio.
Ogni problema di Cauchy

$$y' = y\ \sin(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad k\,\pi < y_0 < (k+1)\,\pi$$

produce come soluzione una funzione $y = y(x)$ monotona che prende valori ancora $k\,\pi < y(x) < (k+1)\,\pi \quad \forall x$.
Tale funzione é crescente o decrescente a seconda del segno di $y\ \sin(y)$ nell'intervallo $(k\,\pi\,,\,(k+1)\,\pi)$.
I limiti di tale soluzione $y(x)$ sono

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = k\,\pi$$
$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = (k+1)\,\pi$$

se si trattava di una funzione crescente, il viceversa nell'altro caso.

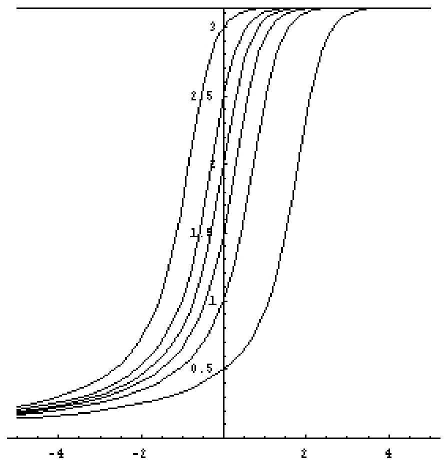

FIGURA 1. Soluzioni dell'equazione autonoma $y' = y\sin(y),\ y(0) = y_0,\ 0 < y_0 < \pi$

Attenzione: la funzione $y\sin(y)$ é pari, il segno che prende nell'intervallo $(k\pi, (k+1)\pi)$ lo prende anche nell'intervallo, simmetrico $(-k\pi, -(k+1)\pi)$

Attenzione: la funzione $y\sin(y)$ non é periodica, fatene il grafico. Quindi anche le soluzioni dell'equazione che incontriamo nelle varie striscie $(k\pi, (k+1)\pi)$ non sono uguali tra loro !

2. Esercizio

Assegnata l'equazione differenziale $y' = (y-1)(y-2)$

- *disegnare, in modo qualitativo, i grafici delle soluzioni,*
- *usando l'equazione differenziale stessa determinare a quali quote le soluzioni possono ammettere un flesso,*
- *indicata con* $y(x, c)$ *la soluzione che soddisfa la condizione* $y(0) = c \leq 2$ *determinare*
$$\lim_{x\to+\infty} y(x, c),$$
- *sviluppare in formula di Taylor di punto iniziale* $x_0 = 0$ *ed ordine* $n = 3$ *la soluzione* $y(x, 0)$.

Soluzione

L'equazione $y' = (y-1)(y-2)$ é autonoma, le sue soluzioni d'equilibrio sono
$$y \equiv 1, \quad y \equiv 2$$

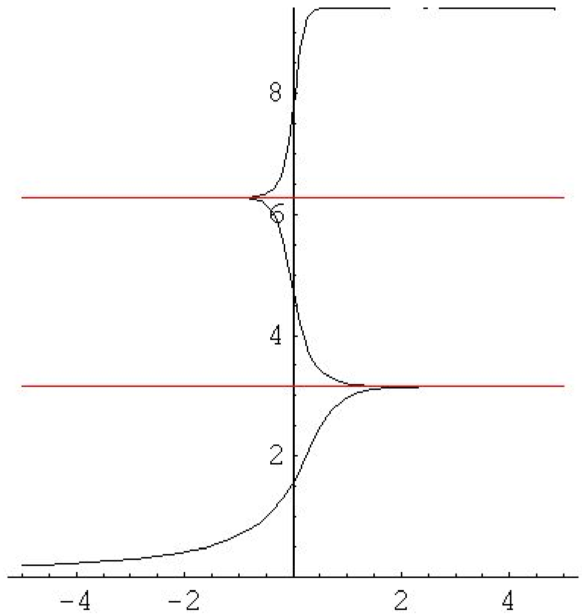

FIGURA 2. I grafici delle soluzioni della $y' = y\sin(y)$ nei vari intervalli non sono uguali...

Le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$y' = (y-1)(y-2), \quad y(x_0) = y_0, \quad y_0 \neq 1,\ y_0 \neq 2$$

sono funzioni monotone.

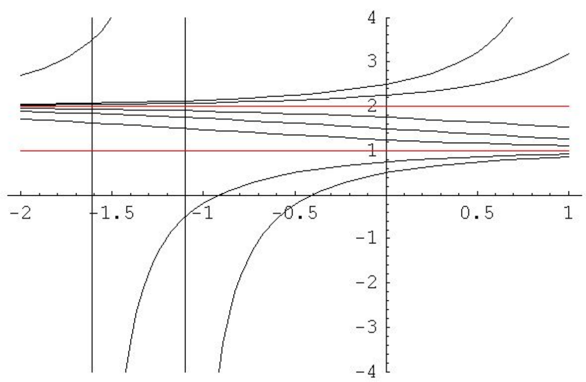

FIGURA 3. $y' = (y-1)(y-2)$, in rosso le due soluzioni d'equilibrio: $y(x) \equiv 1, \quad y(x) \equiv 2$.

Tenuto conto del segno di $(y-1)(y-2)$ sono:

- crescenti se $y_0 > 2$

- decrescenti se $1 < y_0 < 2$
- crescenti se $y_0 < 1$

Le rette verticali che notate in Figura (3) corrispondono agli asintoti verticali posseduti da alcune delle soluzioni dell'equazione appartenenti ai semipiani $y < 1$ oppure $y > 2$. Il loro carattere crescente puó infatti essere ... *irrefrenabile*!

I flessi corrispondono all'annullarsi della derivata seconda

$$y'' = f'(y).y' = f'(y).f(y) = 0 \quad \rightarrow \quad f'(y) = 0 \quad \rightarrow \quad 2y - 3 = 0$$

quindi le soluzioni (non costanti) dell'equazione assegnata hanno un flesso solo alla quota $y = 3/2$.

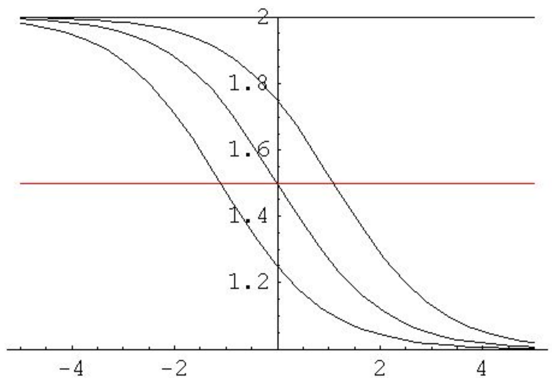

FIGURA 4. I flessi, tutti alla quota 1.5

Quindi hanno un flesso tutte e sole le soluzioni che soddisfano un problema di Cauchy

$$y' = (y-1)(y-2), \quad y(x_0) = y_0, \quad 1 < y_0 < 2$$

Il limite richiesto:

$$\lim_{x\to+\infty} y(x,2) = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$$

Il carattere monotono delle soluzioni permette di riconoscere che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x,c) = 1 \quad \forall c < 2$$

infatti:

- per $1 < c < 2$ la soluzione é decrescente, decrescente verso quota 1,
- per $c = 1$ la soluzione é $y(x,1) \equiv 1$

- per $c < 1$ la soluzione é crescente, crescente verso quota 1.

La formula di Taylor:

$$y(x,0) \simeq y(0,0) + y'(0,0)x + \frac{1}{2}y''(0,0)x^2$$

Tenuto conto che

$$y(0,0) = 0, \quad y'(0,0) = (0-1)(0-2) = 2, \quad y''(0,0) = 2.0 - 3 = -3$$

si ha

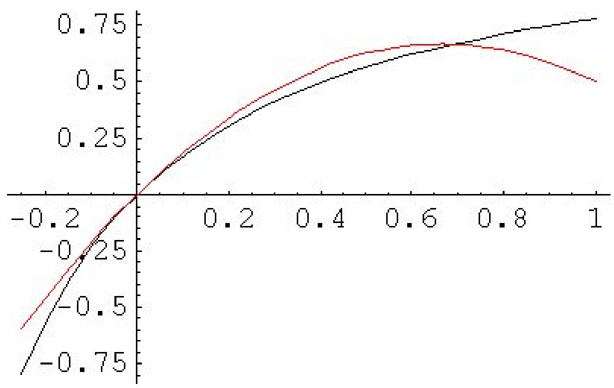

FIGURA 5. La soluzione $y(x,0)$ e, in rosso, l'approssimazione di Taylor $3x - 3x^2/2$

$$y(x,0) \simeq 2x - \frac{3}{2}x^2$$

La soluzione *vera* é, naturalmente (*integrate come si integrano le equazioni autonome*),

$$y(x,0) = \frac{2 - 2\,e^x}{1 - 2\,e^x}$$

Si noti tuttavia che l'approssimazione di Taylor é stata determinata servendosi solo dell'equazione $y' = (y-1)(y-2)$ e della condizione iniziale $y(0) = 0$.

3. Esercizio

Determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$y' = \frac{y\,\ln(y)}{2x}, \quad y(1) = 1 \quad \textit{oppure} \quad y(1) = 2.$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$

Primo problema:

$$y' = \frac{y\,\ln(y)}{2x}, \quad y(1) = 1 \quad \rightarrow \quad y(x) \equiv 1$$

Ricordate sempre, davanti al problema di Cauchy per un'equazione a variabili separabili

$$y' = f(y).g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

di controllare se $f(y_0) = 0$?: nel caso lo sia, la soluzione é, banalmente, $y(x) \equiv y_0$.

Secondo problema:

$$\int_2^y \frac{dt}{t\ln(t)} = \int_1^x \frac{1}{2\tau}\,d\tau \quad \rightarrow \quad \ln(\ln(y)) - \ln(\ln(2)) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

da cui

$$\ln(y) = \sqrt{x}\ln(2), \quad \rightarrow \quad y(x) = e^{\ln(2)\sqrt{x}} = 2^{\sqrt{x}}$$

Naturalmente soluzione definita per $x > 0$.
Nell'integrazione non sono stati messi i moduli perché giá sapevamo di lavorare con $x \simeq 1$ e $y \simeq 2$ situazione in cui anche $\ln(y) > 0$.

4. Esercizio

Assegnata l'equazione lineare $y'\sin(x) + y\cos(x) = 2$,
$0 < x < \pi$

- *determinare tutte le soluzioni*
- *dimostrare che solo una di tali soluzioni converge per* $x \to 0$.

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$

Si tratta di un'equazione

non di forma normale

essa equivale a

$$y' + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y = \frac{1}{\sin(x)}$$

equazione LINEARE DEL PRIMO ORDINE A COEFFICIENTI VARIABILI, definiti per $x \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$: puó essere studiata pertanto in ciascuno degli intervalli $(k\pi, (k+1)\pi)$

Soluzione dell'omogenea:

$$\ln(|y|) = \ln(|\sin(x)|) + c \quad \rightarrow \quad y(x) = A.\frac{1}{\sin(x)}$$

La scomparsa dei moduli, e la comparsa del coefficiente A, si spiegano dal momento che stiamo lavorando (obbligatoriamente) in un intervallo in cui $\sin(x)$, e quindi $y(x)$, hanno segno costante.

Una soluzione della completa (variazione delle costanti): cerchiamo tale soluzione nella forma

$$A(x).\frac{1}{\sin(x)} : \quad A'(x).\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin(x)}, \quad \rightarrow \quad A'(x) = 1, \quad A(x) = x + c$$

La soluzione dell'equazione completa cercata é

$$\overline{y}(x) = (x + c).\frac{1}{\sin(x)}$$

Tutte le soluzioni sono

$$y(x) = A.\frac{1}{\sin(x)} + (x + c).\frac{1}{\sin(x)} = (B + x).\frac{1}{\sin(x)}$$

ove $B = A + c$.

LIMITE IN $x = 0$:

Supponiamo di lavorare in uno dei due intervalli $(-\pi, 0)$ oppure $(0, \pi)$: tra le funzioni

$$(B + x).\frac{1}{\sin(x)}$$

soluzioni dell'equazione differenziale, solo quella con $B = 0$ ammette limite per $x \rightarrow 0$, si tratta, in tal caso, del noto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

5. Esercizio

Risolvere il problema di Cauchy lineare

$$y' = \frac{2y}{x} + x^2 \sin^2(x), \quad y(1) = 0.$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$
Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine:

- Soluzioni omogenea associata: $y' = \frac{2y}{x}$, $\quad y(x) = A.x^2$
- Soluzione della completa (variazione delle costanti) $y(x) = A(x).x^2$:

$$A'(x)x^2 = x^2 \sin^2(x) \quad \to \quad A'(x) = \sin^2(x), \quad \to \quad A(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2\,x)}{4}$$

- Soluzioni dell'equazione:
$$y(x) = \left(A + \frac{x}{2} - \frac{\sin(2\,x)}{4} \right) x^2$$
- Condizione iniziale
$$\left(A + \frac{1}{2} - \frac{\sin(2)}{4} \right) 1^2 = 0 \quad \to \quad A = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2)$$

6. Esercizio

Determinare una funzione $y(x)$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y(x) \geq 0$ *tale che, detta*

$$B(x) = \int_0^x y(t)dt$$

l'area del sottografico di y *e* $A(x)$ *l'area della restante parte del rettangolo di estremi* $[(0,0) - (x, f(x)]$, *riesca*

$$A(x) = nB(x), \quad n \in N.$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$ É sottinteso che si lavora per $x \geq 0$: altrimenti $B(x)$ diventa negativa e trattarla come area di qualche cosa non é bello...

$$B(x) = \int_0^x y(t)dt, \quad A(x) = x\,y(x) - B(x)$$

$$x\,y(x) - B(x) = n\,B(x), \quad \to x\,y(x) = (n+1)\,B(x)$$

Derivando si ricava

(1) $$x\,y'(x) = n\,y(x), \quad y(0) = 0$$

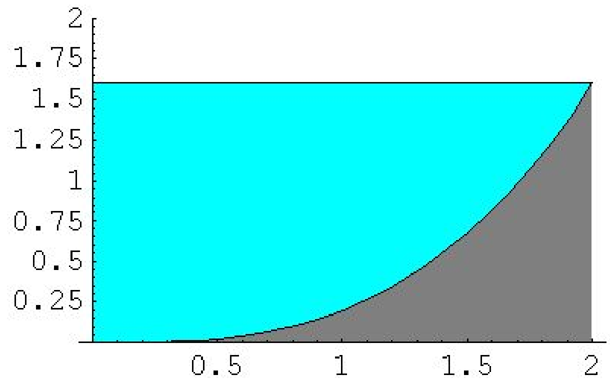

FIGURA 6. $A(x)$ in blu, $B(x)$ in grigio, $y(x) = x^3/5$

Attenzione: si tratta di un'equazione non di forma normale !
Infatti.... il problema di Cauchy (1) ha infinite soluzioni

$$y(x) = c\,x^n, \quad \forall c > 0$$

7. Esercizio

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{x-y}{x+y}, \quad y(1) = 1.$$

Soluzione

Si tratta di un'*equazione omogenea* indicando con questa parola il fatto che la funzione

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

é omogenea di grado 0.
L'equazione equivale, per $x \neq 0$ a

$$y' = \frac{1 - y/x}{1 + y/x},$$

Posto

$$z = \frac{y}{x}, \quad y' = x \,.\, z' + z$$

si ha

$$x\,z' = \frac{1-z}{1+z} - z, \quad z(1) = 1$$

equazione *a variabili separabili* .

$$\int_1^z \frac{1+z}{1-2z-z^2}dz = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

$$\ln(\left|\frac{-2}{1-2z-z^2}\right|) = \ln(x^2) \quad \to \quad -1+2z+z^2 = \frac{2}{x^2}$$

Ritornando ad y si ha

$$y^2+2xy-x^2 = 2 \quad \to \quad y(x) = -x \pm \sqrt{2x^2+2}$$

La scelta obbligata dovendo essere $y(1) = 1$ é

$$y(x) = -x + \sqrt{2}\,\sqrt{1+x^2}$$

8. Esercizio

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = 2\frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1. \tag{2}$$

Soluzione

La sostituzione

$$\frac{y}{x} = z$$

conduce all'equazione

$$x\,z' + z = \frac{2}{z} + z \quad z(1) = 1$$

$$z\,dz = \frac{2}{x}\,dx \quad \to \quad \int_1^z z\,dz = 2\int_1^x \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}(z^2-1) = \ln(x^2), \quad \to \quad z = \sqrt{1+2\ln(x^2)}, \quad \to \quad y(x) = x\sqrt{1+2\ln(x^2)}$$

Osservazione 8.1. *I grafici delle soluzioni dell'equazione omogenea (2) hanno la proprietá di avere su coppie di punti omotetici*

$$(x_0, y_0), \quad (k\,x_0,\,k\,y_0)$$

tangenti paralleleVedi Smirnov, Vol. II, S I.1.5. La Figura seguente riporta i grafici delle linee di livello della funzione

$$f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{x^2} - 2\ln(x^2)$$

ottenuta integrando l'equazione differenziale precedente e che quindi sono grafici di soluzioni.

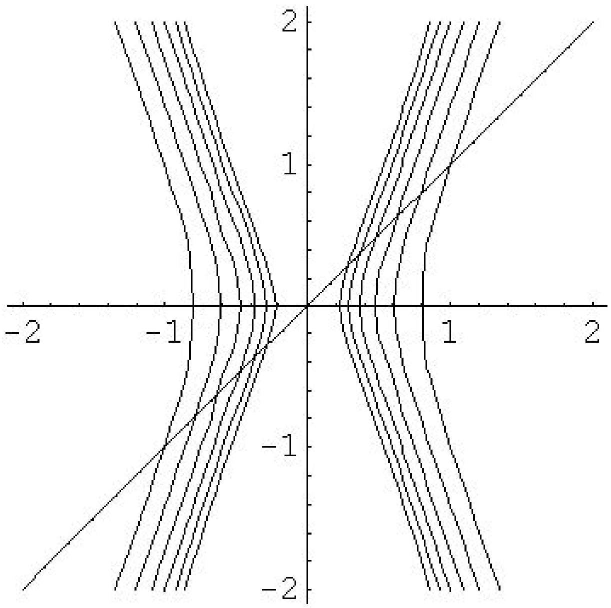

FIGURA 7. $f(x, y) = c$

In Figura si intravede il fenomeno: la retta per l'origine taglia le varie linee di livello in punti tutti tra loro omotetici, le tangenti in tali punti sono parallele tra loro.

9. Esercizio

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{y^2}{x^2 - xy}, \quad y(1) = 2.$$

Soluzione

La solita sostituzione $z = y/x$ conduce all'equazione a variabili separabili

$$x\, z' = \frac{2z^2 - z}{1 - z} \quad z(1) = 2$$

$$\int_2^z \frac{1 - z}{2z^2 - z} dz = \int_1^x \frac{1}{x} dx$$

$$\ln\left(\frac{4}{3}(2z - 1)\right) - \ln(z^2) = \ln(x^2)$$

$$\frac{4}{3}(2z - 1) = x^2 z^2$$

$$z = \frac{1}{3x^2}\left(4 \pm \sqrt{16 - 12x^2}\right)$$

$$y = \frac{1}{3x}\left(4 + \sqrt{16 - 12x^2}\right)$$

10. Esercizio

Determinare le soluzioni dei problemi

$$y' = -(x+y)^2, \quad y(0) = 1, \quad y(0) = \frac{3}{2}.$$

Soluzione La sostituzione

$$z = x + y, \quad y' = z' - 1$$

trasforma l'equazione in

$$z' - 1 = -z^2$$

a variabili separabili.
Primo problema di Cauchy: (ha una soluzione semplicissima)

$$z' = 1 - z^2, \quad z(0) = 1, \quad \to \quad z(x) \equiv 1$$

da cui $y(x) = 1 - x$.
Secondo problema di Cauchy:

$$z' = 1 - z^2, \quad z(0) = \frac{3}{2}$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{z} \frac{1}{1 - z^2} dz = \int_0^x x\, dx$$

$$\left.\frac{-\log(|-1+z|)}{2} + \frac{\log(|1+z|)}{2}\right|_{\frac{3}{2}}^{z} = x$$

$$\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{z} = 2\,x \quad \to \quad \ln\left(\frac{z+1}{5z-5}\right) = 2\,x$$

$$z(x) = \frac{5\,e^{2x} + 1}{5\,e^{2x} - 1} \quad \to \quad y(x) = \frac{5\,e^{2x} + 1}{5\,e^{2x} - 1} - x$$

11. Esercizio

Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = x\,y + e^{-x^2}\,y^3$$

$\boxed{\textbf{Soluzione}}$ Si tratta di un'equazione di Bernoulli

$$y' = p(x)\,y + q(x)\,y^m = 0, \quad m \neq 1$$

Essa ha, per $m > 0$ la ovvia soluzione $y \equiv 0$: le altre, diverse da zero in ogni punto per il teorema di unicitá (i grafici di due soluzioni diverse non si intersecano...) si ottengono con il seguente algoritmo

$$y' = x\,y + e^{-x^2}\,y^3 \quad \to \quad -2\,y^{-3}\,y' = -2\,x\,y^{-2} - 2e^{-x^2}$$

da cui, chiamata $z = y^{-2}$ si riconosce

$$z' = -2\,x\,z - 2\,e^{-x^2}$$

equazione lineare di primo ordine:

- Equaz. omogenea associata: $z' = -2\,x\,z \quad \to \quad z(x) = A\,.\,e^{-x^2}$
- Soluzione della completa (variazione delle costanti): $A(x)\,.\,e^{-x^2}$

$$A'(x)e^{-x^2} = -2e^{-x^2} \quad \to \quad A'(x) = -2 \quad \to \quad A(x) = c - 2x$$

- Soluzione generale dell'equazione lineare completa

$$z(x) = A\,.\,e^{-x^2} - 2x\,.\,e^{-x^2}$$

Trovata $z = y^{-2}$ si trova, ovviamente

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{A\,.\,e^{-x^2} - 2x\,.\,e^{-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{A - 2x}}\,e^{-x^2/2} \tag{3}$$

La presenza di quel denominatore nel quale figura anche una radice quadrata fa capire come la soluzione trovata non possa essere definita su tutto l'asse reale... si tratti cioé di una *soluzione in piccolo* !
Le funzioni (3) *esplodono* per $x \to A/2$ come si riconosce nella Figura (8)

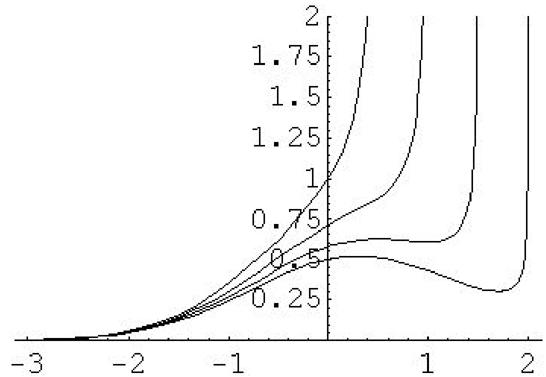

FIGURA 8. Le funzioni (3) per $A = 1, 2, 3, 4$