$\boxed{\text{Le soluzioni del foglio 3}}$

1. Esercizio

Consideriamo la famiglia di elicoidi, vedi Figura 1,

$$x = u\cos(v),\ y = u\sin(v),\ z = kv, \quad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi$$

Quella proposta nell'esercizio corrisponde alla scelta $k = 1$

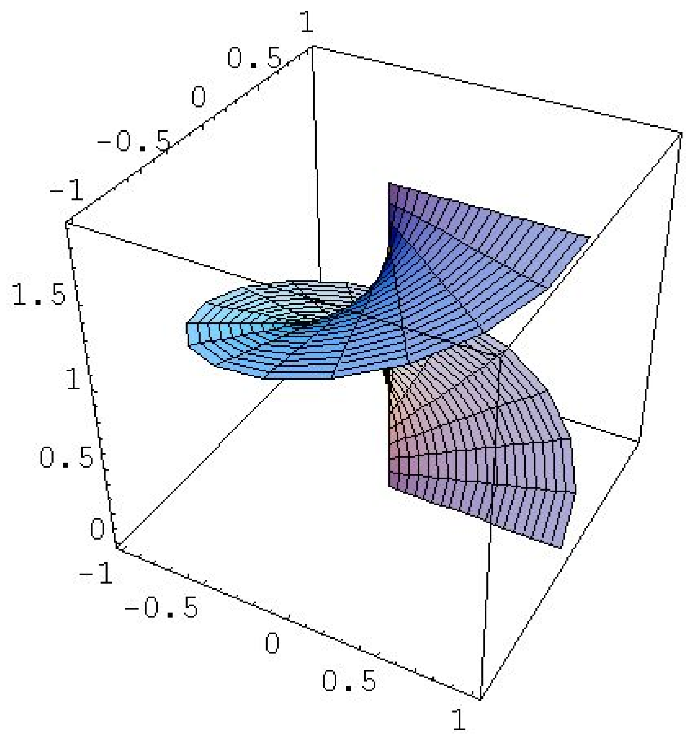

FIGURA 1. Elicoide con $k = 0.3$

Matrice jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ u\sin(v) & u\,\cos(v) & k \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + k^2}$$

$$\text{Area}(k) = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{u^2+k^2}\ du\,dv = 2\pi \int_0^1 \sqrt{u^2+k^2}\ du$$

$$A(k) = \pi\left(\sqrt{1+k^2} - k^2\ \log(\sqrt{k^2}) + k^2\ \log(1+\sqrt{1+k^2})\right) \tag{1}$$

Trovate questo integrale con la sostituzione $u = k\sinh(t)$ oppure cercatelo su qualche prontuario (vedi Volume I, pag.273, (46)), oppure calcolatelo con *Mathematica.*
L'area richiesta nell'Esercizio, per $k = 1$ é quindi

$$A(1) = \pi\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right) \cong 7.2118$$

Per $k = 0$ l'elicoide coincide con il cerchio del piano $z = 0$ e la sua area viene appunto quella, π del cerchio di raggio 1: per $k \neq 0$ l'area é maggiore (ovviamente).
Derivando si ottiene

$$A'(k) = 2\pi \int_0^1 \frac{k}{\sqrt{u^2 + k^2}} du$$

da cui $|A'(k)| \leq 2\pi$ la funzione $A(k)$ é lipschitziana con costante $L = 2\pi$
Ad esempio

$$|A(0.3) - A(0)| \leq 2\pi \times 0.3$$

da cui si deduce che l'area dell'elicoide in Figura 1 non differisce da π per piú di $0.6\,\pi$, ovvero

$$A(0.3) \leq 1.6\,\pi$$

Trovate, con gli strumenti del calcolo, il grafico della funzione $A(k)$ di cui alla formula (1), grafico accennato nella Figura (2).

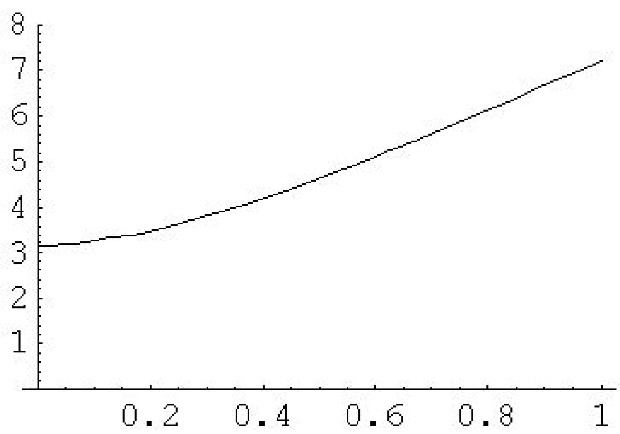

FIGURA 2. Il grafico della funzione lipschitziana $A(k)$ per $k \in [0, 1]$

2. Esercizio

Ruotare il grafico $x = \cosh(z) \; -1 \leq z \leq 1$ intorno all'asse z significa descrivere la superficie dello spazio

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \cosh(z)$$

che si rappresenta, parametricamente con

$$\begin{cases} x = & \cosh(z)\cos(\theta) \\ y = & \cosh(z)\sin(\theta) \qquad -1 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = & z \end{cases}$$

La matrice jacobiana riesce

$$J = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\cosh(z) & \cos(\theta)\cosh(z) & 0 \\ \cos(\theta)\sinh(z) & \sin(\theta)\sinh(z) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \cosh(z)\sqrt{1 + \sinh^2(z)} = \cosh^2(z)$$

$$\text{Area} = \iint_{[0,2\pi]\times[-1,1]} \cosh^2(z) d\theta\, dz = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh^2(z) dz = 2\,\pi\left(1 + \frac{\sinh(2)}{2}\right)$$

$\boxed{\text{NOTA: } \textit{superfici di rotazione}}$

La matrice jacobiana relativa alla rotazione di una $x = f(z) > 0, \quad a \leq z \leq b$ generica é

$$j = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)f(z) & \cos(\theta)f(z) & 0 \\ \cos(\theta)f'(z) & \sin(\theta)f'(z) & 1 \end{pmatrix}$$

La relativa espressione

$$EG - F^2 = f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)}$$

L'area che ne deriva é

$$2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)} dz$$

É evidente che

$$2\pi f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)} dz$$

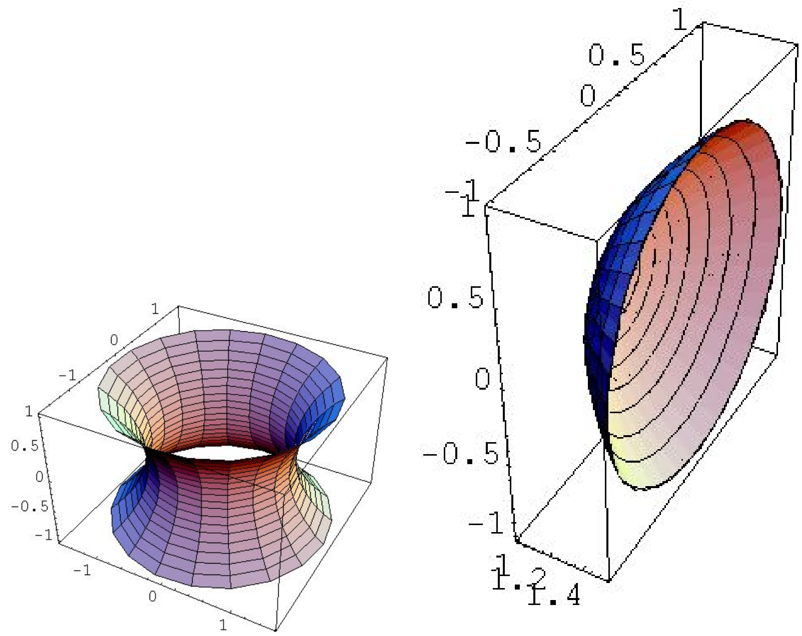

FIGURA 3. a) Rotazione intorno asse z, b) rotazione intorno asse x

approssima la superficie cilindrica ottenuta facendo ruotare il segmento di lunghezza

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(z)}dz$$

su una circonferenza di raggio $f(z)$.
A pagina 429 del Volume II trovate una espressione analoga ma ruotando rispetto all'altro possibile asse: il grafico del $\cosh(z)$ puó essere ruotato intorno all'asse z (come nell'Esercizio 2) ottenendo una forma di fuso, ma poteva anche essere ruotato intorno all'asse x ottenendo una conca, vedi figura 3.

Le osservazioni di pag. 429 si riferiscono a questa (conca) seconda possibilitá.

3. Esercizio

Rappresentazione parametrica della sfera S di raggio unitario

$$\begin{cases} x = & \sin(u)\cos(v) \\ \\ y = & \sin(u)\sin(v), \quad , \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi \\ \\ z = & \cos(u) \end{cases}$$

Matrice jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) & \cos(u)\sin(v) & -\sin(u) \\ \\ -\sin(u)\sin(v) & \sin(u)\cos(v) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sin(u)$$

L'integrale superficiale doppio richiesto é pertanto

$$\int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} \sin^2(u)\sin(u)\, du = 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3(u) du = 2\pi \frac{4}{3}$$

4. Esercizio

Verificare il teorema della divergenza vuol dire:

- calcolare il flusso uscente del vettore $\overrightarrow{F}$ assegnato traverso le sei faccette frontiera del cubo assegnato,
- calcolare l'integrale (triplo) di div$\overrightarrow{F}$sul cubo (pieno) assegnato,
- riconoscere che i due valori coincidono.

La frontiera del cubo é formata da sei facce: il versore normale ha su ognuna di esse una sola componente diversa da 0 (naturalmente quindi uguale o a 1 o a -1).

$x = -1$	$\nu = \{-1, 0, 0\}$	$F = \{-1, 2y, 3z\}$	$F \times \nu = 1$	$\int F \times \nu d\sigma = 4$
$x = 1$	$\nu = \{1, 0, 0\}$	$F = \{1, 2y, 3z\}$	$F \times \nu = 1$	$\int F \times \nu d\sigma = 4$
$y = -1$	$\nu = \{0, -1, 0\}$	$F = \{x, -2, 3z\}$	$F \times \nu = 2$	$\int F \times \nu d\sigma = 8$
$y = 1$	$\nu = \{0, 1, 0\}$	$F = \{x, 2, 3z\}$	$F \times \nu = 2$	$\int F \times \nu d\sigma = 8$
$z = -1$	$\nu = \{0, 0, -1\}$	$F = \{x, 2y, -3\}$	$F \times \nu = 3$	$\int F \times \nu d\sigma = 12$
$z = 1$	$\nu = \{0, 0, 1\}$	$F = \{x, 2y, 3\}$	$F \times \nu = 3$	$\int F \times \nu d\sigma = 12$

$$\iint_{\partial C} F \times \nu \; d\sigma = 8 + 16 + 24 = 48$$

Calcolo della divergenza:

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} 2y + \frac{\partial}{\partial z} 3z = 6$$

$$\iiint_C \operatorname{div} \overrightarrow{F} \; dxdydz = 6 \iiint_C \; dxdydz = 6 \times 2^3 = 48$$

5. Esercizio

Usare il teorema della divergenza per calcolare il flusso uscente dalla superficie della piramide significa ridursi a calcolare l'integrale triplo della divergenza

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial}{\partial x}2x + \frac{\partial}{\partial y}3y + \frac{\partial}{\partial z}4z = 9$$

esteso alla piramide

$$\iiint_P \mathrm{div}\overrightarrow{F}\ dxdydz = 9 \times Volume(P) = 9.\frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$

avendo tenuto conto che la piramide assegnata ha area di base 1/2, altezza 1 e quindi volume 1/6.

6. Esercizio

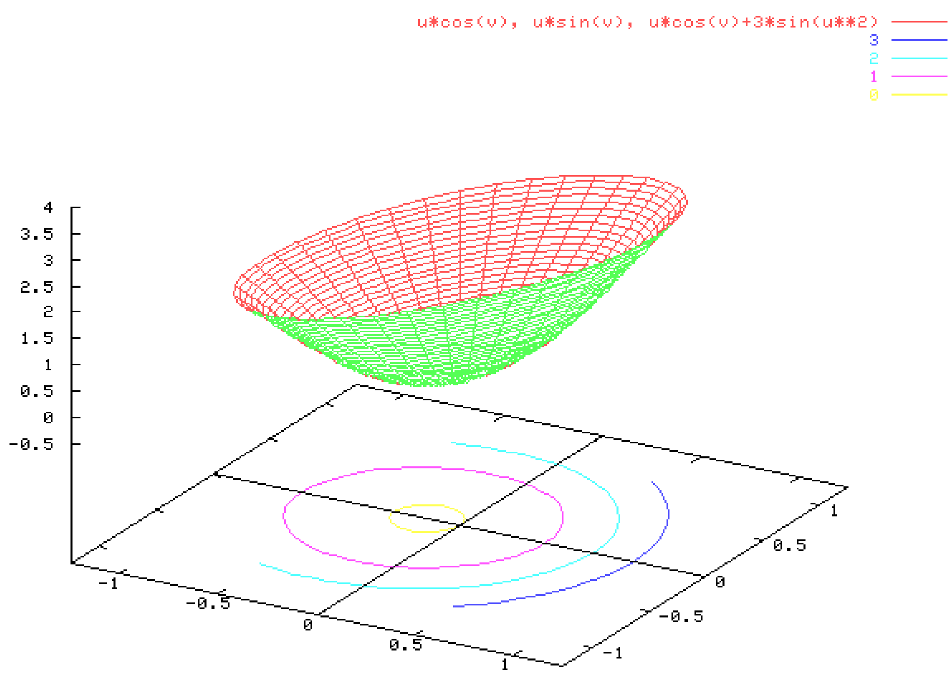

FIGURA 4. La superficie dell'Esercizio 6

La circuitazione richiesta puó essere calcolata

- direttamente osservando che la curva ha rappresentazione parametrica

$$x = \cos(t), y = \sin(t), z = \cos(t) + 3\sin(1), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

- indirettamente tramite il teorema di Stokes che conduce a calcolare il flusso del rotore.

6.1. Calcolo diretto.

$$\overrightarrow{t} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}\{-\sin(t),\, \cos(t),\, -\sin(t)\}$$

avendo supposto di percorrere la curva nel verso antiorario.

$$\int_C \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^{2\pi} \left[-\sin(t) - \sin^2(t)\right] dt = -\pi$$

6.2. Uso del teorema di Stokes.

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 1 & 0 & y \end{pmatrix} = \{1, 0, 0\}$$

Il flusso del rotore puó essere calcolato traverso una qualunque superficie che abbia quel bordo: é abbastanza evidente che la curva C precedente sta tutta sul piano

$$z = x + 3\sin(1)$$

Calcoliamo quindi il flusso del rotore traverso la superficie

$$x = \rho\cos(\theta),\, y = \rho\sin(\theta), z = \rho\cos(\theta) + 3\sin(1), \quad 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$$

La normale, si tratta di una superficie piana, é la normale al piano $z = x + 3\sin(1)$

$$\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{1, 0, -1\} \tag{2}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{2}$$

Pertanto

$$\pm \iint_S \operatorname{rot} F \times \nu\; d\sigma = \pm \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \; 1\; \rho\; d\rho = \pm\pi$$

La scelta dell'orientamento del versore normale é cruciale: per ora possiamo solo dire che la circuitazione richiesta vale $\pm\pi$. La scelta del segno nella 2 é la seguente: ν deve essere orientato in modo che il determinante che ha

- prima riga: le componenti della normale esterna al bordo
- seconda riga: le componenti della tangente al bordo

- terza riga: la normale ν alla superficie

sia positivo.
Basta eseguire il conto in un punto, ad esempio per $\theta = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

.......bisognava, nella 2 prendere il segno $-$.
Infatti, con tale scelta i due metodi di calcolare la circuitazione (quello diretto e quello tramite il teorema di Stokes danno effettivamente lo stesso valore, $-\pi$).

7. Esercizio

I campi vettoriali come quelli proposti in questo esercizio si chiamano RADIALI:

- hanno simmetria sferica
- sono diretti come il raggio
- hanno lo stesso modulo in tutti i punti che hanno stessa distanza dall'origine.

$$\overrightarrow{F} = h(|\overrightarrow{r}|)\overrightarrow{r} = h(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\{x\,,y\,,z\,\}$$

$$\mathrm{div}\overrightarrow{F} = 3h(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) + h'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Ovvero

$$\mathrm{div}\overrightarrow{F} = 3h(|\overrightarrow{r}|) + h'(|\overrightarrow{r}|)\,|\overrightarrow{r}|$$

7.1. Il caso proposto al punto ii).

$$\overrightarrow{F} = \{\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\}$$

In questo caso $h(|\overrightarrow{r}|) = |\overrightarrow{r}|^{-3}, \quad h'(|\overrightarrow{r}|) = -3|\overrightarrow{r}|^{-4}$

$$\mathrm{div}\overrightarrow{F} = 3|\overrightarrow{r}|^{-3} - 3|\overrightarrow{r}|^{-4}\,|\overrightarrow{r}| = 3|\overrightarrow{r}|^{-3} - 3|\overrightarrow{r}|^{-3} \; = 0$$

$$div\overrightarrow{F} = 0$$

Il flusso di $\overrightarrow{F}$ attraverso la frontiera $\partial\Omega$ di un aperto Ω contenente l'origine é uguale al flusso traverso qualsiasi superficie sferica di centro l'origine, Sia S una di esse, quella ad esempio di raggio 1

$$\iint_S F \times \nu \, d\sigma = \int_0^{\pi} \sin(\varphi) d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi$$

8. Esercizio

L'esercizio adotta la notazione delle forme differenziali.

8.1. Il calcolo diretto.

$$\int_\gamma xdx+(x+y)dy+(x+y+z)dz = \int_0^{2\pi} \{\sin(t)\cos(t)-(\sin(t)+\cos(t))\sin(t)+$$
$$+2(\sin(t)+\cos(t))(\cos(t)-\sin(t))\}dt = -\pi$$

La rappresentazione parametrica data orienta la curva in senso ORARIO

8.2. Il teorema di Stokes.

$$\text{rot}\{x, x+y, x+y+z\} = \{1, -1, 1\}$$

Normale alla prima superficie:

$$\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, -1\}$$

La normale deve essere quindi rivolta verso il BASSO :

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, -1\}$$

Flusso: integrale superficiale

$$\iint_S rot\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = -\iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} d\sigma = -\pi$$

Normale alla seconda superficie:

$$\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{3+4x^2+4y^2+4x+4y}}\{1+2x, 1+2y, -1\}$$

La normale deve essere quindi rivolta verso il BASSO :

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{3+4x^2+4y^2+4x+4y}}\{1+2x, 1+2y, -1\}$$

Flusso integrale superficiale

$$\iint_S rot\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma = \iint_{x^2+y^2\le 1} (2x-2y-1)\, dxdy = -\pi$$

Appunti preparati 21 ottobre 2003