Le soluzioni del foglio 2

1. Esercizio

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\overrightarrow{F} = (y + 3x, 2y - x)$ *per far compiere ad una particella un giro dell'ellisse* $4x^2 + y^2 = 4$ *in senso orario.*

1.1. Soluzione. L'ellisse proposta, ∂E

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

ha equazioni parametriche

$$x = \cos(t), \quad y = 2\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Al crescere di t l'ellisse viene percorsa in senso antiorario.

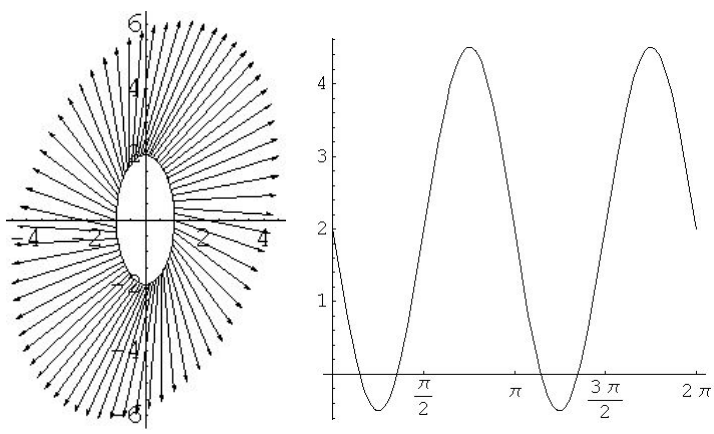

FIGURA 1. Il campo F sull'ellisse assegnata, a destra il grafico del prodotto scalare$F \times t$ con t orientata nel verso orario.

Il disegno di Figura 1 mostra come il prodotto scalare $F \times t$ da integrare faccia prevedere un risultato positivo.
Il lavoro richiesto é, tenuto conto del verso di percorrenza,

$$L = -\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds =$$

$$-\int_0^{2\pi} \{(y(t) + 3x(t))\, x'(t) + (2y(t) - x(t))\, y'(t)\}\, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \{[2\sin(t) + 3\cos(t)]\,[-\sin(t)] + [6\sin(t) - \cos(t)]\, 2\cos(t)\}\, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} -2\sin^2(t) - 2\cos^2(t)dt = 2\int_0^{2\pi} dt = 4\pi$$

1.2. Usiamo il Teorema di Stokes. I segni $-$ corrispondono alla richiesta di percorrere l'ellisse nel senso orario, che é l'opposto di quello offerto dalla parametrizzazione.

$$-\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = -\iint_E [(2y-x)_x - (y+3x)_y\,]\, dxdy =$$

$$= -\iint_E (-2)\; dxdy = 4\pi$$

Osservazione 1.1. *L'espressione trovata nell'integrale doppio, $F_{2,x} - F_{1,y} \neq 0$ si puó leggere anche dicendo che*

il campo $\overrightarrow{F}$ non é irrotazionale e, quindi non é conservativo.

2. Esercizio

Calcolare l'area della regione limitata dalla retta $y = x$ e dalla curva γ di equazioni parametriche $(x(t), y(t)) = (t^2 + t, t^4 + t)$ con $t \in [0, 1]$.

2.1. Soluzione. La regione é riportata in Figura 2

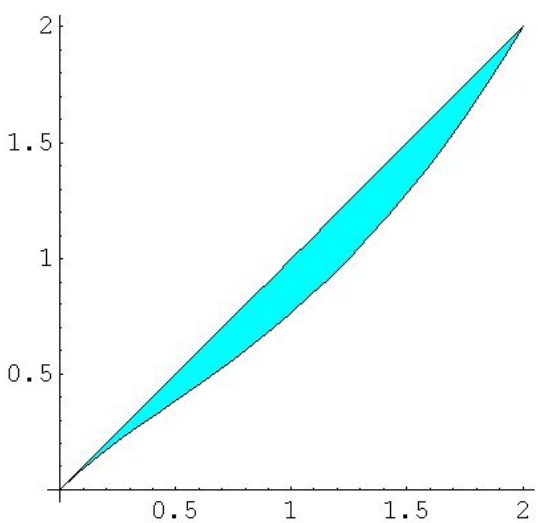

Figura 2. La regione di cui cercare l'area

Le formule per l'area, basate sul teorema della divergenza o sul teorema di Stokes sono tre

$$\begin{cases} \text{Area}(E) = & \frac{1}{2}\int_{\partial E}\{x,y\}\times\nu\ ds \\ \text{Area}(E) = & \int_{\partial E}\{x,0\}\times\nu\ ds \\ \text{Area}(E) = & \int_{\partial E}\{0,y\}\times\nu\ ds \end{cases}$$

Scegliamo la prima

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2}\int_{\partial E}\{x,y\}\times\nu\ ds$$

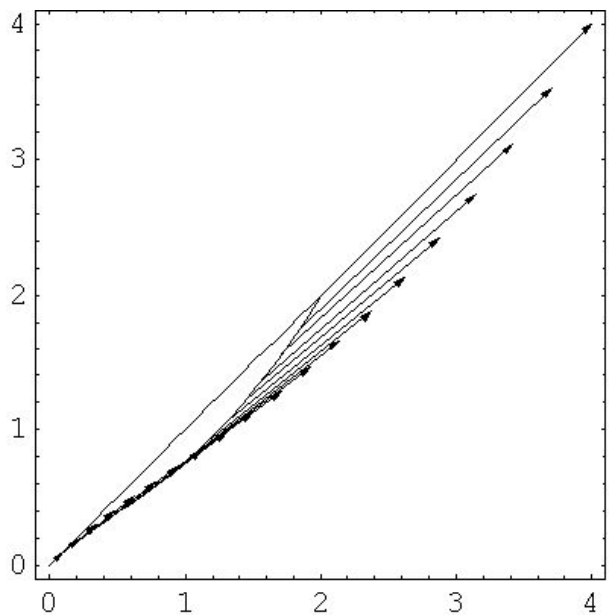

FIGURA 3. Il poco flusso di $\{x,y\}$ uscente dalla regione.

Il tratto di integrale relativo alla retta $y = x$ vale 0 perché su tale linea (x,y) e ν sono evidentemente ortogonali.
La tangente lungo la curva inferiore é

$$t = \{1+2t, 1+4t^3\}$$

la normale quindi é

$$\nu = \pm\{-(1+4t^3), 1+2t\}$$

Il verso uscente corrisponde alla scelta

$$\nu = -\{-(1+4t^3), 1+2t\} = \{1+4t^3, -(1+2t)\}$$

Il versore si ottiene dividendo il vettore precedente per il suo modulo

$$\sqrt{(1+2t)^2+(1+4t^3)^2}$$

L'integrale da eseguire é quindi

$$\int_0^1 \frac{(t+t^2)(1+4t^3)-(t+t^4)(1+2t)}{\sqrt{(1+2t)^2+(1+4t^3)^2}}\sqrt{(1+2t)^2+(1+4t^3)^2}dt$$

ovvero

$$\int_0^1 [(t+t^2)(1+4t^3)-(t+t^4)(1+2t)]dt = \frac{3}{5}$$

L'area pertanto é

$$\text{Area} = \frac{3}{10}$$

2.2. Un calcolo manuale. Non é difficile esplicitare dalla relazione $x = t + t^2$ con $x \in [0, 2]$ la funzione inversa

$$t = \frac{-1+\sqrt{1+4\,x}}{2}$$

che, sostituita nella seconda produce la funzione

$$y = \frac{-1+\sqrt{1+4\,x}}{2} + \frac{\left(-1+\sqrt{1+4\,x}\right)^4}{16} = 2\,x + x^2 - x\,\sqrt{1+4\,x}$$

L'area cercata é quindi anche prodotta dall'integrale

$$\int_0^2 \left\{x - [2\,x + x^2 - x\,\sqrt{1+4\,x}]\right\} dx =$$

$$= \frac{-x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \sqrt{1+4\,x}\,\left(-\left(\frac{1}{60}\right) + \frac{x}{30} + \frac{2\,x^2}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{3}{10}$$

3. Esercizio

Dato il campo vettoriale

$$F = (\frac{x-1}{((x-1)^2+y^2)^2}, \quad \frac{y}{((x-1)^2+y^2)^2})$$

i) Calcolare il rotore di F
ii) Dimostrare che F é conservativo e trovare un potenziale.

3.1. Soluzione. É sottinteso che il vettore F ha la terza componente nulla, quindi il suo rotore ha le prime due componenti certamente nulle e la terza

$$\mathrm{rot}_z F = \frac{\partial}{\partial x} F_x - \frac{\partial}{\partial y} F_x$$

Indicato con $d(x, y)$ il denominatore delle due componenti di F si ha quindi

$$\mathrm{rot}_z F = \frac{1}{d^2(x,y)} \left(-y\, d_x \, + (x-1)\, d_y\right) = 0$$

Il campo F é

- definito in R^2 privato del punto $Q = (1, 0)$
- ha, in tutto R^2, privato del punto $Q = (1, 0)$, rotore nullo:
- quindi é conservativo in... ogni dominio rettangolare di R^2 che non includa Q,
- anzi é conservativo in ogni aperto stellato che non includa Q,
- non é tuttavia escluso che sia conservativo in tutto R^2 privato del punto Q.

Per rispondere all'ultimo punto basta calcolare il lavoro di F lungo una circonferenza C di centro Q

$$\int_C \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds$$

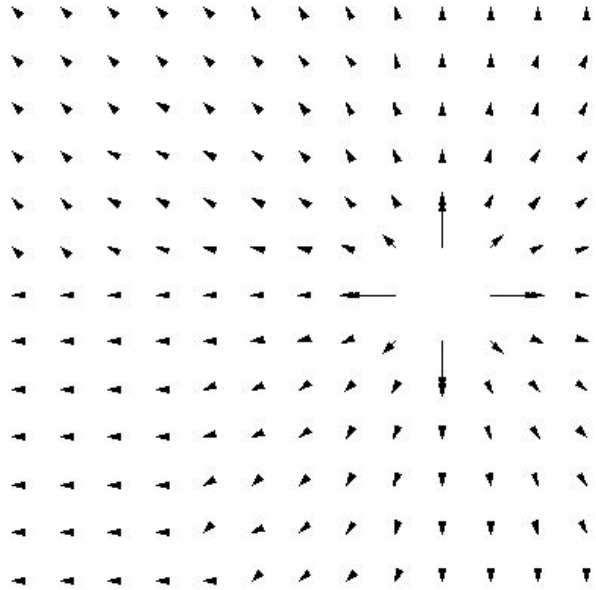

FIGURA 4. L'aspetto radiale del campo F intorno al punto Q

É evidente che tale integrale é nullo: infatti F é, in ogni punto della circonferenza C diretto come il raggio, quindi é ortogonale al versore tangente $\overrightarrow{t}$ vedi Figura (4).

Quindi F é conservativo in tutto R^2 privato naturalmente del punto Q

Quindi F ammette potenziale: chiunque vede che le due componenti di F sono infatti, a meno di un ovvio fattore, le due derivate parziali di

$$\frac{1}{(x-1)^2+y^2}$$

Un potenziale di F é

$$U(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2+y^2}$$

4. Esercizio

Sia C la curva di equazioni parametriche

$$x = \cos(t), \quad y = t\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- *Trovare l'area della regione racchiusa*
- *Dire per quali $t \in [0, 2\pi]$ é definito il versore ν normale e calcolarlo.*

4.1. Soluzione.

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2}\int_{\partial E} \{x, y\} \times \nu \; ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(t)(t\sin(t))' - t\sin(t)(\cos(t))'\}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(t)\sin(t) + t\}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} tdt = \pi^2$$

4.2. Il versore normale. Cominciamo dal vettore tangente

$$\{(\cos(t))', \quad (t\sin(t))'\} = \{-\sin(t), \sin(t) + t\cos(t)\}$$

Per $t = 0$ si ha il vettore nullo: quindi la rappresentazione parametrica offerta non soddisfa nel punto $t = 0$ ai requisiti di una curva regolare per la quale si richiede infatti

$$x'^2(t) \; + \; y'^2(t) \; > \; 0$$

Esiste, tuttavia, il limite per $t \to 0^+$ del versore tangente

$$\{-\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{\sin(t)^2 + (t\,\cos(t) + \sin(t))^2}}\right), \frac{t\,\cos(t) + \sin(t)}{\sqrt{\sin(t)^2 + (t\,\cos(t) + \sin(t))^2}}\}$$

$$\left\{\frac{-1}{5}, \quad \frac{2}{5}\right\}$$

Limite che peró é diverso dal limite per $t \to 2\pi$ che vale $\{0, 1\}$ vedi Figura 5.

La curva assegnata é chiusa ma é dotata di versori tangente e normale solo per $0 < t < 2\pi$.

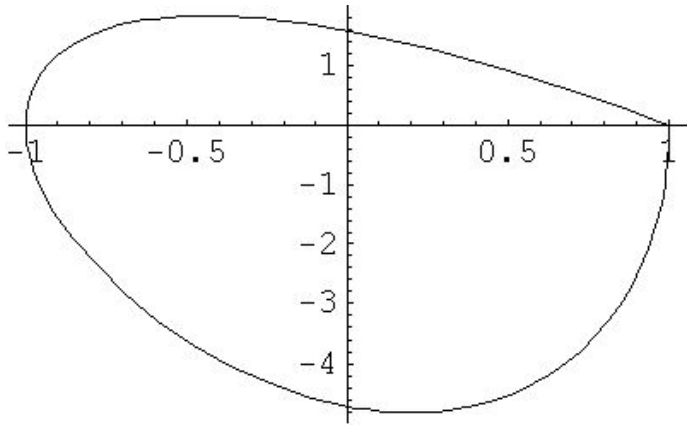

FIGURA 5. $x = \cos(t), \quad y = t\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$

5. Esercizio

Dato il campo vettoriale $F = (xy,\ (x^2 - y^2)/2)$
i) si calcolino flusso uscente e circuitazione rispetto alla curva C *di equazioni parametriche* $x = \cos^3(t),\ y = \sin^3(t), \quad t \in [0, 2\pi]$
ii) Dimostrare che F *é un campo vettoriale conservativo in tutto* R *e che i suoi potenziali sono funzioni armoniche.*
iii) Costruire uno di tali potenziali.

5.1. Soluzione.

5.1.1. *Flusso uscente:* la curva assegnata é chiusa quindi (???) é la frontiera di una regione Ω del piano alla quale applicare il teorema della divergenza

$$\int_C \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, ds = \iint_\Omega \operatorname{div}(\overrightarrow{F}) dxdy$$

Ma $\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = 0$, quindi il flusso richiesto vale 0.

5.1.2. *La circuitazione.* Servendosi del Teorema di Stokes si ha

$$\int_C \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \iint_\Omega \operatorname{rot}_z(\overrightarrow{F}) dxdy$$

Ma $\operatorname{rot}_z(\overrightarrow{F}) = 0$ quindi anche la circuitazione é nulla.

5.1.3. *Campo conservativo.* $\overrightarrow{F}$ é irrotazionale in tutto R^2 quindi... é conservativo in tutto R^2.

5.1.4. *Un potenziale.* Le primitive di xy rispetto ad x sono

$$\frac{1}{2}x^2 y + g(y)$$

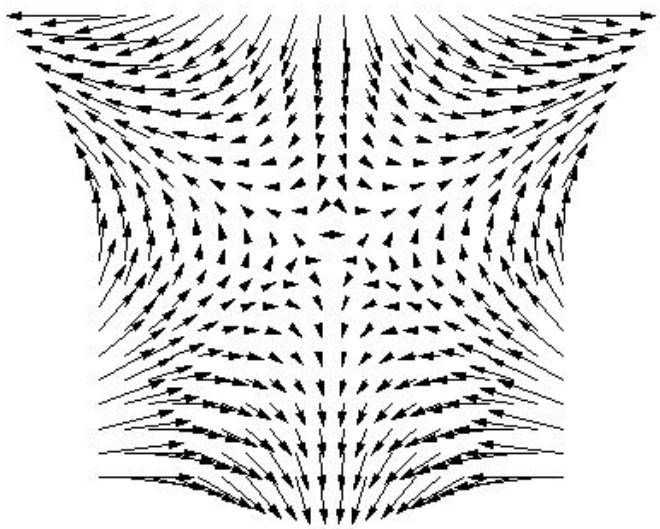

FIGURA 6. Il campo F dell'Esercizio 5 : non ci sono punti da cui *diverga*.

Basta imporre ora che tali funzioni abbiano come derivata rispetto ad y l'espressione $\frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ assegnata. A conti fatti questo si realizza prendendo

$$g(y) = -\frac{1}{6}y^3$$

Quindi un potenziale di F é la funzione

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3$$

Questo vuol dire che

$$\overrightarrow{F} = \nabla U(x, y)$$

5.1.5. *Il potenziale é armonico.* Si puó verificare che

$$\triangle\left(\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3\right) = 1 - 1 = 0$$

Notate del resto che

$$\triangle U(x, y) = \text{div } \nabla U(x, y) = \text{div}\,\overrightarrow{F}$$

e quindi si poteva prevedere che l'eventuale potenziale sarebbe stato una funzione armonica dal momento che il campo $\overrightarrow{F}$ aveva divergenza nulla, vefi Figura 6.

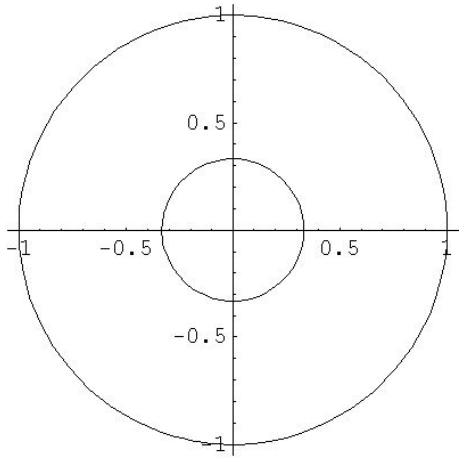

FIGURA 8. Esercizio 6: il teorema di Stokes su una corona circolare

6. Esercizio

Sia $\overrightarrow{F}$ *un campo irrotazionale, definito in* R^2 *privato dei due punti* $P_1 = (0,0)$ *e* $P_2 = (2,0)$. *Sapendo che*

$$\int_{C_i} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{t}\, ds = i, \quad i = 1, 2$$

con C_i *la circonferenza di centro* P_i *e raggio 1, calcolare l'integrale* $\int_\gamma \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{t}\, ds$ *essendo* γ *l'ellisse* $4x^2 + 25y^2 = 25$.

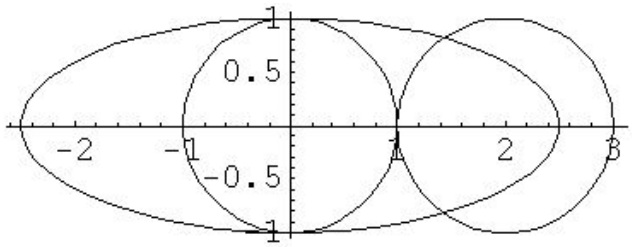

FIGURA 7. Esercizio 6: l'ellisse e le due circonferenze

6.1. Soluzione. Essendo il campo F irrotazionale gli integrali sulle circonferenze C_i di raggio 1 sono uguali a quelli sulle circonferenze di raggi minori e stessi centri: per convincersene basta applicare il teorema di Stokes alla corona circolare di centro l'origine e raggi, ad esempio 1/3 e 1

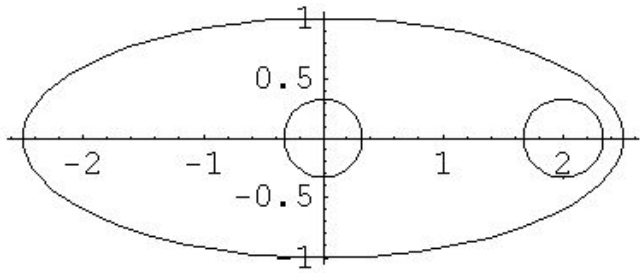

FIGURA 9. Esercizio 6: ellisse e circonferenze di raggio 1/3

$$\int_{C_1(1)} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds - \int_{C_1 1/3} F \times t ds = \iint_{Corona} \mathrm{rot}_z \overrightarrow{F}\ dxdy = 0$$

Ne segue quindi che

$$\int_{C_1 1/3} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = 1$$

Tenuto conto di ció si puó applicare il teorema di Stokes alla regione, Figura (9), delimitata dalle due circonferenze di centri $P_i, i = 0, 1$ e dall'ellisse assegnata e dedurne che

$$\int_E \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_{C_1(1/3)} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds + \int_{C_2(1/3)} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = 1 + 2 = 3$$

7. Esercizio

i) Calcolare il lavoro del campo $F = (xy - 2, x^2 + y^2)$ *lungo il segmento* $(0,0) - (1,2)$ *e lungo l'arco di parabola* $y = 2x^2$ *con gli stessi estremi*
ii) sia $u(x,y) = x^3 + yx^2$*: calcolare l'integrale della derivata normale di u lungo i due archi di curva dati precedentemente.*

7.1. Soluzione.

7.1.1. *Il segmento.* La rappresentazione parametrica é

$$x(t) = t, \quad y(t) = 2t, \quad t \in [0,1]$$

Il versore tangente é

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\{1,2\}$$

Ne segue

$$\int_S \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{(2t^2 - 2)1 + (t^2 + 4t^2)2\right\} \sqrt{5} dt = \int_0^1 (12t^2 - 2) dt = 2$$

7.1.2. *L'arco di parabola.* La rappresentazione parametrica é

$$x(t) = t, \quad y = 2t^2, \quad t \in [0,1]$$

il versore tangente é

$$\frac{1}{\sqrt{1+16t^2}}\{1,4t\}$$

Ne segue

$$\int_S \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+16t^2}} \left\{(2t^3 - 2)1 + (t^2 + 4t^4)4t\right\} \sqrt{1+16t^2} dt =$$

$$= \int_0^1 \left\{(2t^3 - 2)1 + (t^2 + 4t^4)4t\right\} dt = \int_0^1 (16t^5 + 6t^3 - 2) dt = \frac{13}{6}$$

7.1.3. *Derivata normale lungo il segmento.* La derivata normale é data da

$$\nabla U \times \nu$$

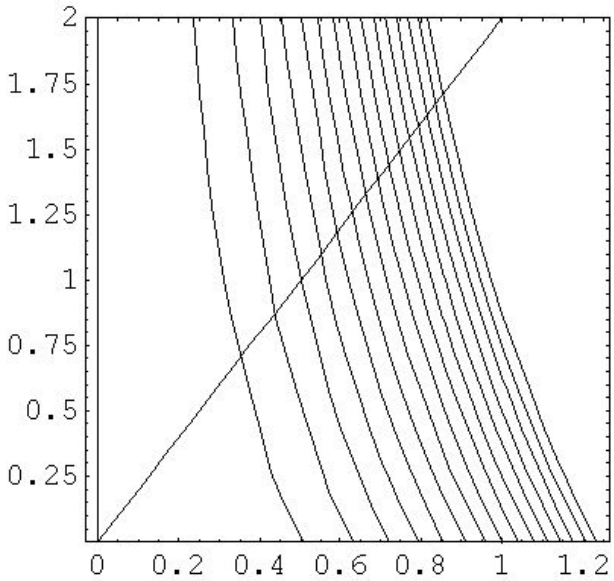

FIGURA 10. 15 linee di livello di $u(x, y) = x^3 + yx^2$ tra $[0, 2]$ e il segmento $(0, 0) - (1, 2)$, relative a livelli equidistribuiti.

Tenuto conto che $\nabla U = \{3x^2 + 2yx,\, x^2\}$ e che $\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\{-2, 1\}$ ne segue che l'integrale richiesto vale, tenuto conto della rappresentazione parametrica del segmento,

$$\pm \int_0^1 \{-2(3t^2 + 4t^2) + 1(t^2)\}dt = \pm \int_0^1 -13t^2 dt = \pm\frac{13}{3}$$

Come si vede, non avendo precisato l'orientamento della normale al segmento, si hanno come risposta due valori $\pm$.

7.1.4. *Derivata normale lungo la parabola.* Come sopra con il versore normale

$$\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + 16t^2}}\{-4t,\, 1\}$$

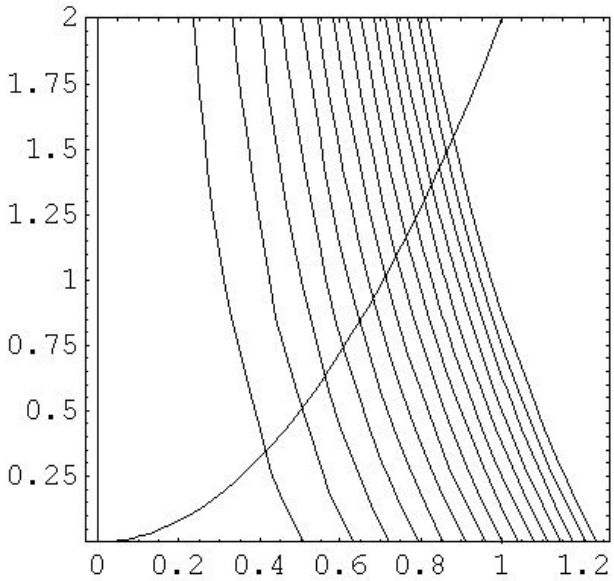

FIGURA 11. 15 linee di livello di $u(x, y) = x^3 + yx^2$ tra $[0, 2]$ e l'arco di parabola, relative a livelli equidistribuiti.

L'integrale richiesto é pertanto

$$\pm \int_0^1 \{-(3t^2 + 4t^3)4t + t^2\}dt = \pm \int_0^1 (t^2 - 12\,t^3 - 16\,t^4)dt = \pm \frac{88}{15}$$

Stessa ambiguitá di segno precedentemente segnalata.

7.2. Cosa si legge dalle linee di livello ?

- Lungo ciascuna linea di livello la funzione é costante: quindi la derivata di una funzione lungo una direzione tangente alle linee di livello é nulla.
- Le Figure (11) e (9) mostrano come le direzioni normali, rispettivamente al segmento e all'arco di parabola, siano abbastanza vicine ad essere tangenti alle linee di livello della funzione $u(x, y) = x^3 + yx^2$
- Se ne deduce che le derivate normali richieste saranno abbastanza piccole in modulo.

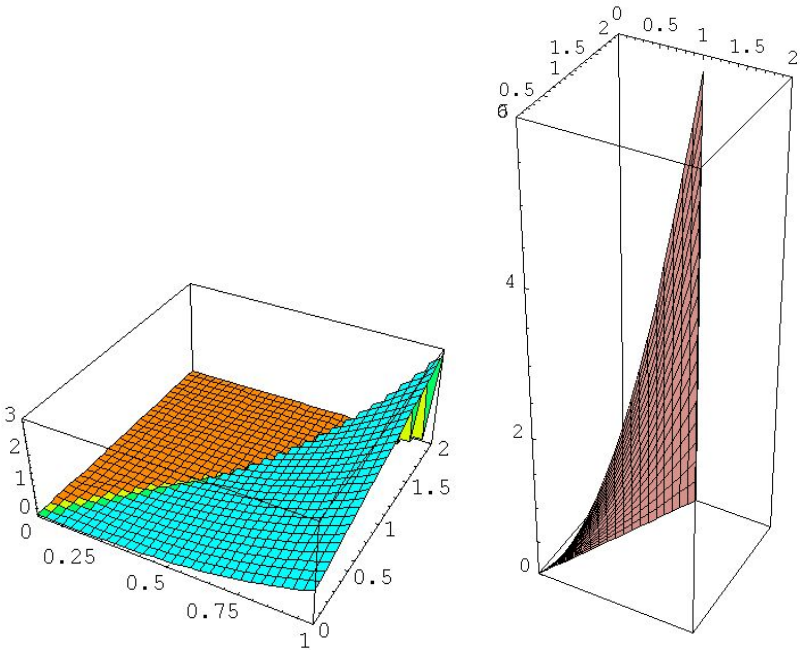

FIGURA 12. La superficie $u(x, y) = x^3 + yx^2$ e un muro alto quanto la sua derivata normale lungo il segmento...

- Ricordate che il gradiente ∇u é ortogonale alle linee di livello ed é in modulo tanto piú grande quanto piú le linee di livello relative a livelli equidistribuiti riescano vicine, vedi Figura (10).