$\boxed{\textbf{Le soluzioni del foglio 1}}$

1. Esercizio

- *Giustificare l'affermazione seguente: l'equazione* $\sin(xy) = 0$ *non definisce implicitamente una funzione in un intorno di* $(0, 0)$.
- *Sia* $g : R^2 \to R$ *definita come segue:*

$$g(x, y) = xy + (y + 1) \sin x + y^2 \ .$$

Dire se l'equazione $g = 0$ *definisce implicitamente in un intorno di* $(0, 0)$ *una funzione* h *della variabile* x *e/o della variabile* y.

- *Dire se la funzione* h *ammette minimo o massimo relativo in zero.*

$\boxed{\textbf{Soluzione 1}}$

$\boxed{\text{i}}$ In corrispondenza ad $x = 0$ tutto l'asse y é soluzione: quindi non é vero che (sia pur localmente) l'insieme delle soluzioni sia un grafico $y = f(x)$

Analogamente, in corrispondenza ad $y = 0$ tutto l'asse x é soluzione: quindi non é vero che (sia pur localmente) l'insieme delle soluzioni sia un grafico $x = g(y)$

L'insieme E formato dalle soluzioni dell'equazione $\sin(xy) = 0$ é composto

- dagli assi
- dalle infinite iperboli

$$xy = k\pi$$

$\boxed{\text{ii}}$

$$\begin{aligned} g_x &= y + (y + 1) \cos x \\ g_y &= x + \sin x + 2y \end{aligned}$$

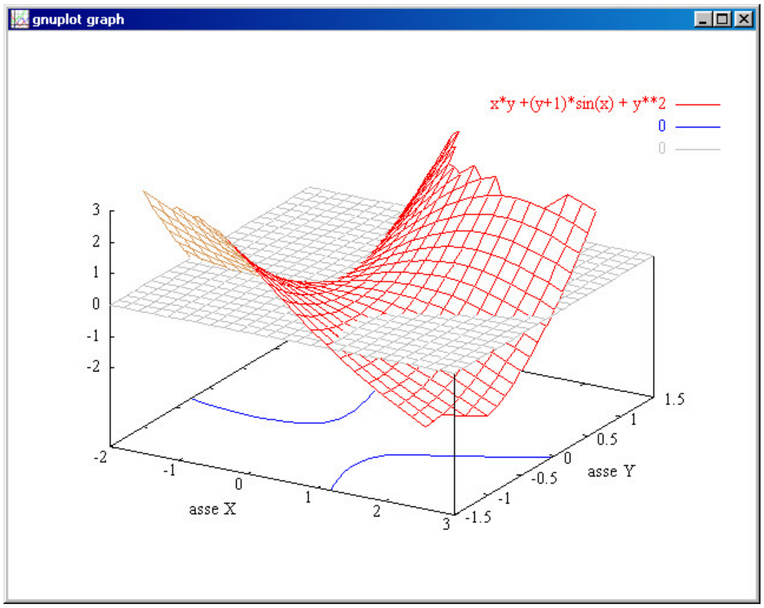

FIGURA 1. Il grafico di $g(x,y) = xy + (y+1)\sin x + y^2$ il piano $z = 0$ e la linea di livello 0 per la $g(x,y)$.

Tenuto conto che $g_x(0,0) = 1$ ne segue che l'insieme $g(x,y) = 0$ in un intorno dell'origine coincide con il grafico di una funzione $x = h(y)$ vedi Figura 2.

$\boxed{\text{iii}}$

Derivata prima:

$$g_x.h_y + g_y = (y + (y+1)\cos h(y))h'(y) + x + \sin h(y) + 2y$$

Nel punto $(0,0)$ riesce

$$g_x.h_y + g_y = h'(0) = 0$$

Derivata seconda:

$$g_{xx}h'^2 + g_{xy}h' + g_x h'' + g_{yx}h' + g_{yy}$$

Nel punto $(0,0)$ riesce:

$$h''(0) + g_{yy}(0,0) = 0 : \quad \rightarrow h''(0) = -g_{yy}(0,0) = -2$$

Quindi:

$$h'(0) = 0, \quad h''(0) < 0, \quad \rightarrow \quad \text{Massimo}$$

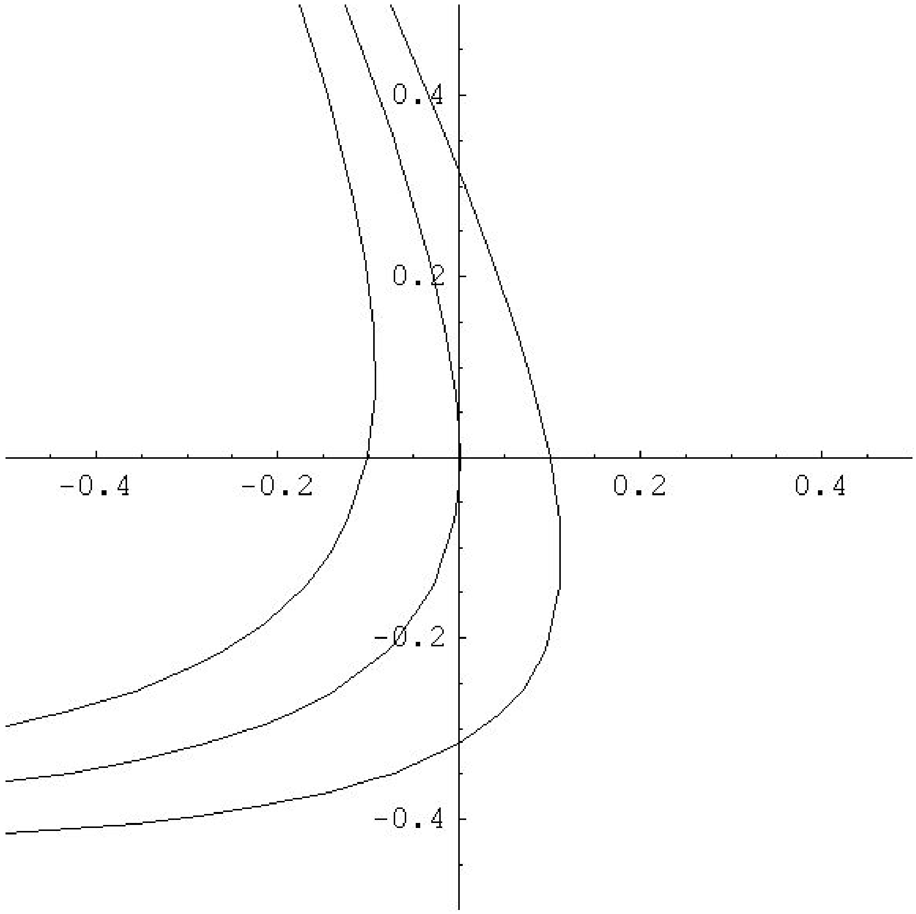

FIGURA 2. Esercizio 1: Tre linee di livello di $g(x, y)$: quella passante per l'origine é il grafico della funzione $x = h(y)$ con un massimo in $y = 0$

2. Esercizio

Sia

$$F(x, y) = e^{x^2+2y} - y \cos x - 1 \ ,$$

- *dimostrare che* $F(x, y) = 0$ *definisce implicitamente una funzione* $f(x)$ *;*
- *calcolare*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} \ .$$

Soluzione 2

i

$$F(0, 0) = 0$$

$$F_x = 2xe^{x^2+2y} + y\sin x, \quad F_y = 2e^{x^2+2y} - \cos x$$

$$F_x(0,0) = 0, \ F_y(0,0) = 1 \neq 0$$

La derivata F_y diversa da zero garantisce la $y = f(x)$

$\boxed{\text{ii}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

Si tratta del quoziente di due infinitesimi, il teorema di Hôpital consente di studiare il quoziente delle derivate

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2+2y} + y\sin x}{(\cos x - 2e^{x^2+2y})2x}$$

ovvero, ponendo al posto di y la $f(x)$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2+2f(x)} + f(x)\sin x}{(\cos x - 2e^{x^2+2f(x)})2x}$$

decomponendo la frazione si ottiene

$$\frac{e^{x^2+2f(x)}}{\cos x - 2e^{x^2+2f(x)}} + \frac{f(x)}{\cos x - 2e^{x^2+2f(x)}} \frac{\sin x}{2x}$$

Termini che, tenuto conto che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

tendono, per $x \to 0$, a

$$\frac{e^0}{1-2e^0} + \frac{0}{1-2e^0}\frac{1}{2} = -1$$

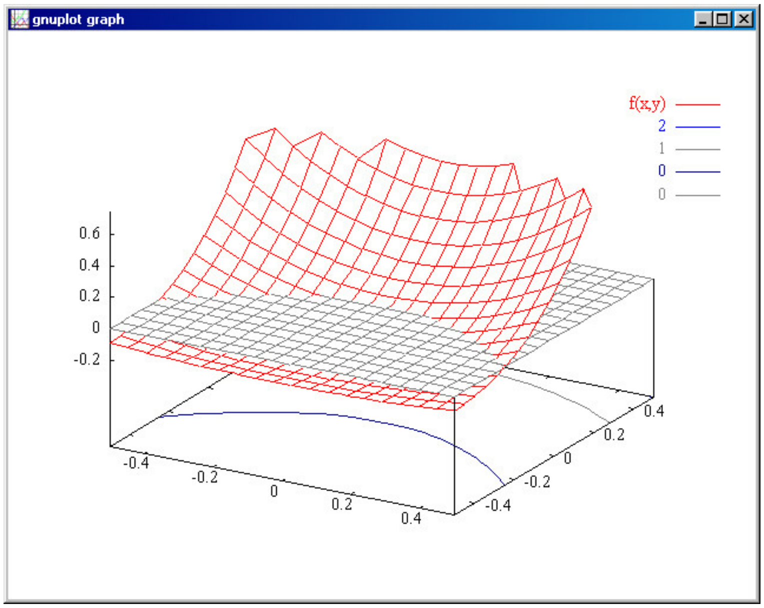

FIGURA 3. Il grafico di $F(x,y) = e^{x^2+2y} - y\cos x - 1$, e le linee di livell1 0, 1, 2

3. Esercizio

Assegnato il sistema

$$\begin{cases} e^y + z + x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$$

dimostrare che in un intorno del punto (0,0,1) il sistema definisce implicitamente due funzioni $\alpha(x), \beta(x)$ tali che $(x, \alpha(x), \beta(x))$ siano soluzioni del sistema. Calcolare poi $\alpha'(0), \beta'(0)$.

$\boxed{\textbf{Soluzioni 3}}$

Il sistema assegnato produce l'intersezione tra il grafico

$$z = 2 - x - e^y$$

e la sfera

$$x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{5}{4}$$

$\boxed{\text{i}}$ Il punto $(0,0,1)$ soddisfa il sistema.

La matrice jacobiana

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} e^y & 1 \\ 2y+1 & 2z \end{pmatrix}$$

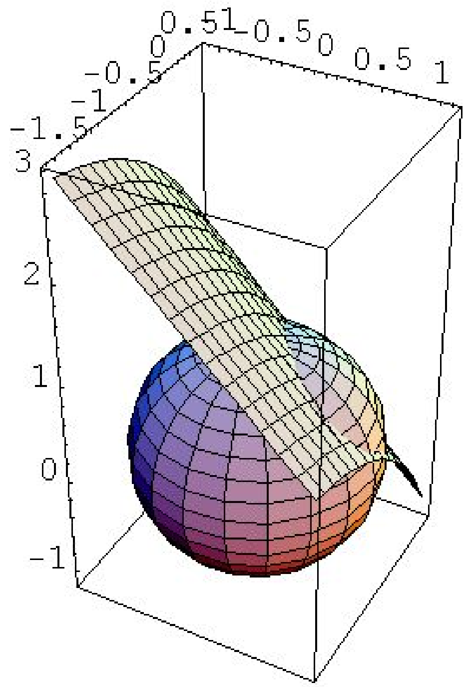

FIGURA 4. L'intersezione, la curva $(x, \alpha(x), \beta(x))$, determinata dal sistema dell'esercizio 3: una sfera e una superficie...

Nel punto $(0,0,1)$ riesce

$$\det \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Il determinante diverso da zero assicura che le soluzioni del sistema sono, in un intorno di $(0,0,1)$, rappresentate dalla curva di equazioni parametriche

$$x, \alpha(x), \beta(x))$$

$\boxed{\text{ii}}$ Le derivate nel punto $(0,0,1)$ soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} 1 & +\alpha'(0) & +\beta'(0) & = 0 \\ 0 & +\alpha'(0) & +2\beta'(0) & = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\alpha'(0) = -2, \quad \beta'(0) = 1$$

In un intorno del punto $(0,0,1)$ il sistema assegnato determina una curva che in tale punto ha tangente parallela al vettore

$$(1, \quad -2, \quad 1)$$

4. Esercizio

Sia

$$F(x,y,z) = x^2y + ze^{xy} + \cos(\pi z)\ ,$$

- *dimostrare che l'equazione $F(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente una superficie $z = f(x,y)$ in un intorno del punto (0,0,1) ;*
- *determinare il piano tangente alla superficie nel punto (0,0,1).*

Soluzioni 4

i Il punto $(0,0,1)$ soddisfa l'equazione $F(x,y,z) = 0$

$$F_z = e^{xy} - \pi \sin(\pi z) :\ \ F_z(0,0,1) = 1 \neq 0$$

quindi l'insieme degli zeri dell'equazione $F(x,y,z) = 0$ si rappresenta come $z = f(x,y)$

ii Le derivate:

$$F_x + F_z f_x = 0, \quad F_y + F_z f_y = 0$$

Calcolando F_x ed F_y nel punto $(0,0,1)$ riesce

$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0$$

Il piano tangente richiesto é quindi

$$z = 0$$

5. Esercizio

Un tendone ha la forma di un cilindro circolare retto sormontato da un cono; sapendo che la base ha il diametro di m.10 e la superficie totale esterna dev'essere di mq.100π, determinare le altezze H del cilindro e h del cono in modo che il volume sia massimo.

Soluzioni 5

i La superficie esterna é data da

$$S(h,H) = 10\pi \left(H + \frac{1}{2}\sqrt{25 + h^2} \right)$$

La condizione $S = 100\pi$ implica

$$H + \frac{1}{2}\sqrt{25 + h^2} = 10$$

ovvero

$$H = 10 - \frac{1}{2}\sqrt{25 + h^2} \tag{1}$$

Le condizioni, implicite nel problema che $h \geq 0$, e $H \geq 0$ implicano

$$h \in I = [0, \sqrt{400 - 25}]$$

Il volume é dato da

$$V(h,H) = 25\pi(H + \frac{1}{3}h)$$

tenuto conto della (5) si ha quindi

$$v(h) = 25\pi\left(10 - \frac{1}{2}\sqrt{25+h^2} + \frac{1}{3}h\right)$$

La derivata rispetto ad h é

$$v'(h) = 25\left(1 - \frac{3\,h}{2\,\sqrt{25+h^2}}\right)\pi$$

Si annulla per $h = 2\sqrt{5}$, punto nel quale cade il massimo relativamente all'intervallo I lecito. Il massimo volume si ha pertanto in corrispondenza a tale valore e risulta

$$25\left(10 - \frac{5\,\sqrt{5}}{6}\right)\pi$$

L'esercizio poteva essere svolto anche tramite l'algoritmo dei moltiplicatori di Lagrange: sia

$$L(h,H,\lambda) = 25\pi(H + \frac{1}{3}h) + \lambda\left\{10\pi\left(H + \frac{1}{2}\sqrt{25+h^2}\right) - 100\pi\right\}$$

Il sistema delle derivate della $L(h,H,\lambda)$ da annullare é il seguente

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial h}L = & 25\pi\frac{1}{3} + 10\lambda\pi\frac{h}{2\sqrt{25+h^2}} = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial H}L = & 25\pi + 10\lambda\pi = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}L = & 10\pi\left(H + \frac{1}{2}\sqrt{25+h^2}\right) - 100\pi = 0 \end{cases}$$

ovvero semplificando dove possibile

$$\begin{cases} \frac{5}{3} + \lambda\frac{h}{\sqrt{25+h^2}} & = 0 \\ \\ 5 + 2\lambda & = 0 \\ \\ H + \frac{1}{2}\sqrt{25+h^2} & = 10 \end{cases}$$

Il sistema determina i valori

$$\lambda = -\frac{5}{2}, \quad h = 2\sqrt{5}, \quad H = 10 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

valori che individuano lo stesso valore massimo del volume trovato prima.

OSSERVAZIONE 5.1. *Aveva senso chiedere il massimo della funzione continua volume* $25\pi(H + \frac{1}{3}h)$ *?*
Sí perché la regione Ω *dove si facevano variare i due parametri* h *e* H *era chiusa e limitata*

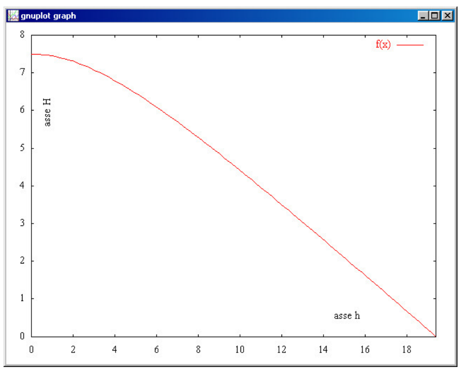

FIGURA 5. Il grafico é la regione Ω su cui variano h e H

6. Esercizio

Determinare il massimo e il minimo della funzione $G(x, y) = x - 2y$ *sul vincolo* $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ *.*

Soluzioni 6

i Sistema

$$\begin{cases} 1 + \lambda(2x - 4) & = 0 \\ -2 + \lambda(2y - 2) & = 0 \end{cases}$$

Deve essere necessariamente $\lambda \neq 0$ e quindi si ricava

$$x = 2 - \frac{1}{2\lambda}, \quad y = 1 + \frac{1}{\lambda}$$

Sostituendo nell'equazione del vincolo si ha

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

I punti individuati sul vincolo sono

$$P_1 = (2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, 1 + 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}), P_2 = (2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, 1 - 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$$

$$G(P_1) = -5\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, G(P_2) = 5\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$\boxed{\text{ii}}$

7. Esercizio

Data l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ e la retta AB passante per i suoi vertici $A = (2, 0)$ e $B = (0, 1)$, determinare sull'ellisse un punto P in modo che l'area del triangolo APB sia massima.

Soluzione 7

La retta ha equazione

$$\frac{x}{2} + y = 1$$

L'area del triangolo APB é data dal semiprodotto della base

$$\overline{AB} = \sqrt{5}$$

per l'altezza, la distanza $\overline{PH}$ di P dalla retta per A e B. Quindi l'area é massima quando é massima la distanza,

$$\overline{PH} = \frac{|\frac{x}{2} + y - 1|}{\sqrt{5}}$$

del punto P dalla retta $\frac{x}{2} + y = 1$, o, equivalentemente, quando é massima

$$5\overline{PH}^2 = (x + 2y - 2)^2$$

Sistema:

$$\begin{cases} (x + 2y - 2) + 2\lambda x & = 0 \\ 2(x + 2y - 2) + 8\lambda y & = 0 \\ x^2 + 4y^2 & = 4 \end{cases}$$

Le prime due equazioni forniscono il sistema lineare

$$\begin{cases} (x + 2y - 2) + 2\lambda x & = 0 \\ 2(x + 2y - 2) + 8\lambda y & = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del precedente sistema sono:

$$\{\lambda = 0 : \ x + 2y - 2 = 0\}, \ \left\{\lambda \neq 0 : \ x = \frac{2}{\lambda + 2}, \ \frac{1}{\lambda + 2}\right\}$$

Le intersezioni con l'ellisse sono:

- per il primo tipo i soli due estremi A e B, in corrispondenza ai quali si ottengono triangoli APB di area 0

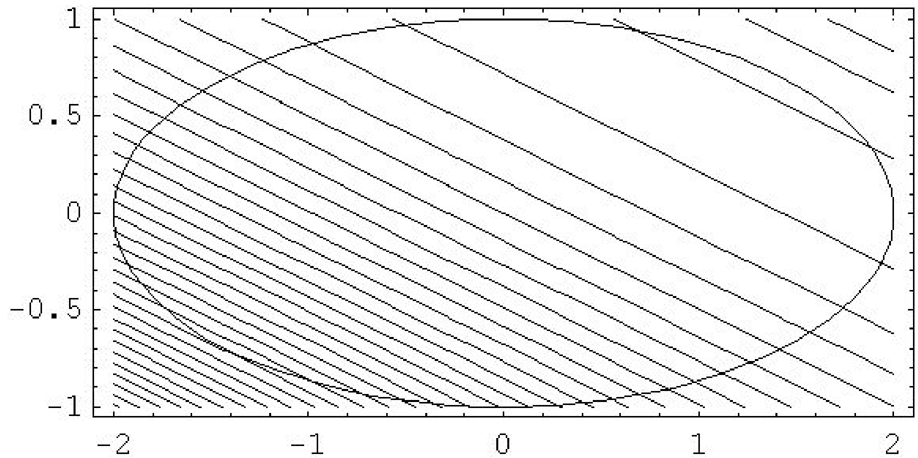

FIGURA 6. Esercizio 8: L'ellisse, vincolo, e le linee di livello della funzione area

- per il secondo tipo, intersecando con l'ellisse si ottengono
$$x = \frac{2}{\lambda+2}, \; y = \frac{1}{\lambda+2} : \quad \to \lambda = \pm\sqrt{2} - 2$$
- I punti sono pertanto
$$P_1 = \left\{ x = \sqrt{2}, \, y = 1/\sqrt{2} \right\}, \; P_2 = \left\{ x = -\sqrt{2}, \, y = -1/\sqrt{2} \right\}$$

Esclusi i primi due triangoli AAB e ABB relativi al primo caso, i due triangoli AP_1B e AP_2B hanno rispettivamente aree
$$area(P_1) = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \quad area(P_2) = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$
Nel punto P_2 si raggiunge il massimo assoluto, nel punto P_1 si incontra un massimo locale o relativo.
I punti dell'ellisse si rappresentano parametricamente con
$$x = 2\cos(\theta), \quad y = \sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$
Il grafico nella seguente Figura (7) rappresenta l'area del triangolo in funzione del parametro θ che determina il punto P:

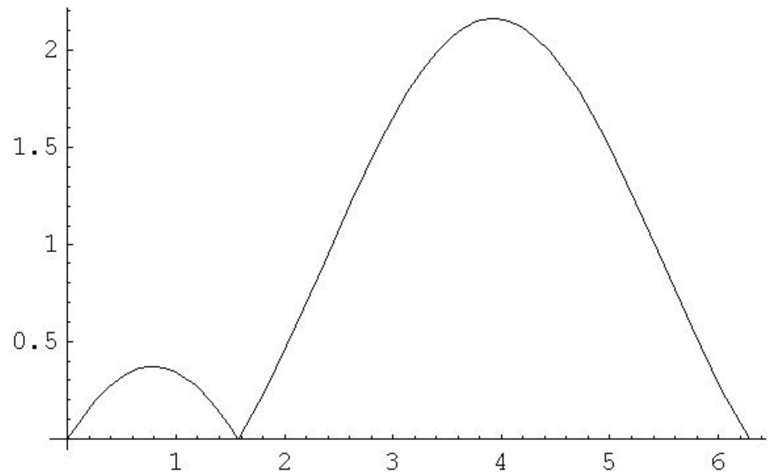

FIGURA 7. Esercizio 8: Grafico dell'area in funzione dell'argomento relativo al punto P