# Analisi vettoriale - A.A. 2003/04

## Esame scritto - 16 dicembre 2003

**Soluzioni:**

**Esercizio 1.** *Sia* $\{D = (x,y) \in R^2, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \ x^2\}$, *calcolare il lavoro compiuto dal campo*

$$F = \{y^2,\ x^2\}$$

*lungo la frontiera di* $D$ *percorsa in senso antiorario.*

Soluzione:

Dal teorema di Stokes si ha

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \times \ \overrightarrow{t}\ ds = \int\int_D \mathrm{rot}_z(\overrightarrow{F})\ dx\ dy$$

tenuto conto che

$$\mathrm{rot}_z(\overrightarrow{F})\ = 2(x-y)$$

si ha

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \times \ \overrightarrow{t}\ ds = 2\int\int_D (x-y)dx\ dy = 2\int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} (x-y)dy = -\frac{2}{5}$$

Il conto diretto: tenuto conto che la curva $\partial D$ é formata da un arco di parabola $y = x^2$, dal segmento orizzontale inferiore $y = 1$ e dai due segmenti verticali $x = \pm 1$ fornisce lo stesso valore.

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \times \ \overrightarrow{t}\ ds = \int_{-1}^{1} 0dx + \int_0^1 dy \int_1^{-1} (x^4\ + x^2\ 2x) + \int_1^0 dydx - \int_{-1}^{1} dx = -\frac{2}{5}$$

**Esercizio 2.** *Studiare la convergenza (puntuale, assoluta, uniforme) della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-|x|)^n}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La serie

$$1 + \frac{(x - |x|)}{\sqrt{3}} + \frac{(x - |x|)^2}{\sqrt{7}} + ... \tag{0.1}$$

ha addendi che valgono, per $n = 1, 2, ...$

$$\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \\ \frac{(2x)^n}{\sqrt{n^2+n+1}} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$$

si calcola con il criterio del rapporto

$$\left| \frac{\frac{(2x)^n}{\sqrt{n^2+n+1}}}{\frac{(2x)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)^2+n}}} \right| = |2x| \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt{(n-1)^2 + n}} \quad \rightarrow \quad |2x| < 1$$

da cui

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Nell'estremo $x = -\frac{1}{2}$ la serie converge semplicemente per il criterio di Leibnitz.

La serie (0.1) assegnata, avendo tenuto conto che a destra di 0 i termini con $n > 0$ sono tutti nulli,

- converge per $-\frac{1}{2} \leq x$
- converge assolutamente per $-\frac{1}{2} < x$
- converge uniformemente per $-\frac{1}{2} + \varepsilon \leq x, \quad \forall \varepsilon > 0$

**Esercizio 3.** *Studiare il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \frac{(1+y^3)t}{(1+t^2)y^2} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'equazione differenziale assegnata é a variabili separabili: la soluzione del problema di Cauchy assegnato si ricava da

$$\int_1^y \frac{y^2}{1+y^3} dy = \int_0^t \frac{t}{1+t^2}$$

da cui

$$\frac{1}{3}\left\{\log(1+y^3) - \log(2)\right\} = \frac{1}{2}\log(1+t^2)$$

Ne segue

$$\log(1+y^3) = \log(2) + \frac{3}{2}\log(1+t^2)$$

ovvero

$$y^3 = 2\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3 - 1$$

da cui

$$y(t) = \sqrt[3]{2\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3 - 1}$$

**Esercizio 4.** *Dimostrare che in un intorno dell'origine l'equazione*

$$e^{y^2} - x^2 + 2y\,\cos(x) = 1$$

*definisce una funzione* $y = f(x)$ . *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Posto $F(x,y) = e^{y^2} - x^2 + 2y\,\cos(x) - 1$, funzione di classe $C^\infty$ in tutto il piano, l'equazione assegnata corrisponde a

$$F(x,y) = 0$$

Riesce evidentemente $F(0,0)=0$, e si ha

$$F_y(x,y) = 2y\, e^{y^2} + 2\cos(x), \quad F_y(0,0) = 2 \neq 0$$

quindi per il teorema di Dini esiste la funzione implicita $y = f(x), \quad f(0) = 0$, definita per $x$ in un intorno di 0.

Sempre dal teorema di Dini discende che

$$F[x, f(x)] \equiv 0 \quad \to \quad \begin{cases} F_x + F_y f'(x) = 0 \\ \\ F_{xx} + 2F_{xy} f'(x) + F_{yy} f'^2(x) + F_y f''(x) = 0 \end{cases}$$

da cui calcolando le relazioni precedenti nel punto $(0,0)$ si ha

$$\begin{cases} 2\, f'(0) = 0 \\ \\ -2 + 2\, f''(0) = 0 \end{cases}$$

Il limite richiesto si determina tramite il Teorema di Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

**Esercizio 5.** *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} y''' + y' &= x \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Soluzioni equazioni omogenea:

$$y_0(x) = A + B\sin(x) + C\cos(x)$$

Soluzione particolare:

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Soluzione generale equazione completa:

$$y(x) = A + B\sin(x) + C\cos(x) + \frac{1}{2}x^2$$

Le condizioni iniziali impongono quindi

$$y(x) = -1 + \cos(x) + \frac{1}{2}x^2$$