Massimi e minimi vincolati

Data una funzione $G \in C^1(D)$, dove D è un aperto di $\mathbb{R}^2$, sappiamo bene dove andare a cercare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi. Una condizione necessaria affinché il punto (x_0, y_0) sia un estremo relativo è che il gradiente della funzione G sia nullo nel punto. Se la funzione G ammette anche le derivate seconde allora possiamo ottenere delle condizioni sufficienti che ci assicurano che effettivamente il punto è massimo o minimo relativo. In tal caso si studia la matrice hessiana.
Cosa succede se vogliamo studiare gli estremi di G lungo una curva di $\mathbb{R}^2$? Questo è un problema che probabilmente avete incontrato andando a studiare il comportamento della funzione G lungo la frontiera di D che in genere sarà una curva.
Se la curva ha una rappresentazione parametrica del tipo $(x(t), y(t))$, dove t è un parametro appartenente ad un opportuno intervallo $[a, b]$, allora per valutare la funzione G lungo la curva basta considerasre la funzione composta $h(t) = G(x(t), y(t))$. Affinché ci sia un punto $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ di massimo o minimo interno alla curva ($t_0 \in (a, b)$) dovrà essere $h'(t_0) = 0$, quindi

$$G_x(x_0, y_0)x'(t_0) + G_y(x_0, y_0)y'(t_0) = 0.$$

Questo significa che la funzione G avrà gradiente ortogonale alla curva nel punto in questione. Se il vettore gradiente avesse nel punto (x_0, y_0) una componente non nulla rispetto al vettore tangente alla curva allora la funzione G crescerebbe o decrescerebbe strettamente al variare del parametro t.
Ora supponiamo che l'insieme di $\mathbb{R}^2$ in cui vogliamo studiare gli estremi di G sia dato tramite un' equazione

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

chiameremo il luogo geometrico dato dalle soluzioni dell'equazione (1) "vincolo". Questa equazione definisce, quando il gradiente di F è non nullo (teorema delle funzioni implicite), una curva regolare la cui tangente in ogni punto (x_0, y_0) del vincolo ha direzione parallela al vettore $(-F_y(x_0, y_0), F_x(x_0, y_0))$. Questo significa che se (x_0, y_0) è un punto sul vincolo sul quale il gradiente di F è non nullo e nel quale è assunto punto di massimo o minimo relativo per la funzione G rispetto ai punti del vincolo, necessariamente deve essere $\nabla G \perp (-F_y, F_x)$, ovvero i vettori ∇G e ∇F devono essere paralleli nel punto (x_0, y_0).
Formalizziamo tutto ciò con la seguente proposizione

Proposizione 1 *Sia D un aperto di $\mathbb{R}^2$, F, $G \in C^1(D)$. Condizione* **necessaria** *affinchè un punto $(x_0, y_0) \in D$ sia un estremo relativo per la funzione G ristretta al vincolo $F(x,y) = 0$, è che sia verificata una delle due seguenti condizioni*

i) $F(x_0, y_0) = 0$ e $\nabla F(x_0, y_0) = (0,0)$;

ii) esiste un valore $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, tale che la funzione $H(x,y,\lambda) := G(x,y) + \lambda F(x,y)$, abbia gradiente nullo nel punto (x_0, y_0, λ_0), ovvero questa terna di valori soddisfi il sistema

$$\begin{cases} G_x + \lambda F_x = 0 \\ G_y + \lambda F_y = 0 \\ F = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Dimostrazione È conseguenza delle considerazioni fatte in precedenza, se un punto (x_0, y_0) si trova sul vincolo e contemporaneamente il gradiente di F è nullo nel punto allora non si può dire nulla e siamo nel caso i), se invece non siamo in questo caso abbiamo visto che necessariamente ∇G e ∇F sono paralleli nel punto, tutto si riassume nella ii); ovvero la condizione di parallelismo e l'appartenenza al vincolo.

Questa Proposizione ci dice che, dopo aver discusso a parte dei punti particolari (quelli che verificano la i)), se vogliamo determinare eventuali punti di massimo o minimo relativi vincolati, questi si troveranno tra le soluzioni di un particolare sistema ottenuto introducendo un nuovo parametro λ. Questo modo di trovare gli estremi vincolati si chiama **metodo dei moltiplicatori di Lagrange**.

Attenzione la precedente proposizione ci da' solo una condizione necessaria ma nessuna condizione sufficiente.

Osservazione 1 I punti che verificano la condizione i) sono i punti in cui non posso applicare il teorema del Dini, in generale non è detto che ci siano, infatti per determinare tali punti dobbiamo risolvere un sistema di tre equazioni in due incognite e quindi è difficile trovare soluzioni.

D'altra parte si possono dare esempi in cui esistono tali punti ed in essi la funzione G assume un estremo relativo pur non essendo verificata la condizione ii). L'esempio è dato dalla funzione $G(x,y) = x$ con il vincolo $F(x,y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$. In questo caso si può disegnare il vincolo (vedi figura 1) e quindi si può osservare che la funzione G (che rappresenta l'ascissa del punto) assume valore minimo nel punto $(1,0)$. In tale punto potete verificare che è soddisfatta la condizione i) ma non la condizione ii).

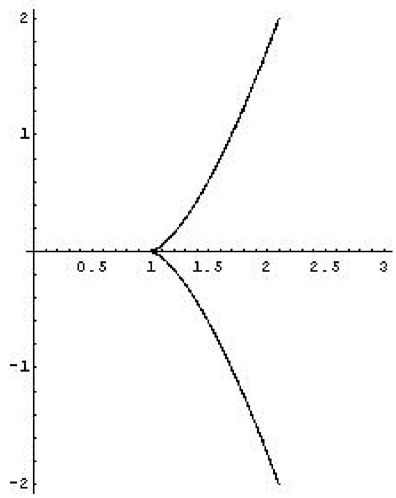

Figura 1: il vincolo $(x-1)^3 - y^2 = 0$

Osservazione 2 Cerchiamo di interpretare geometricamente il fatto che un punto di estremo vincolato verifichi il sistema (2). L'ultima equazione ci dice che il punto appartiene al vincolo. Le altre due, come precedentemente osservato, ci dicono che i gradienti di F e G sono tra loro paralleli. Questo è come dire (se $\nabla G(x_0, y_0) \neq (0,0)$) che la curva di livello $G(x,y) = G(x_0, y_0)$ è tangente al vincolo nel punto (x_0, y_0).

Esercizio 1 Dimostrare, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, che tra tutti i rettangoli di perimetro dato 1, il quadrato è quello di area massima.

In generale, data una funzione G, non è detto che questa ammetta massimo o minimo assoluto sul vincolo. Se però il vincolo fosse un insieme chiuso e limitato allora il Teorema di Weierstrass ci assicura che il massimo ed il minimo sono assunti.
Nell' esercizio precedente il minimo non è assunto; infatti quando andiamo a trascrivere il problema matematicamente e quindi poniamo un lato uguale ad x e l'altro uguale ad y, è vero che il vincolo si scriverà $F(x,y) = 2x+2y-1 = 0$, ma dobbiamo ricordarci che parliamo di lati per cui $x > 0, y > 0$ quindi prenderemo $D = (0,\infty) \times (0,\infty)$, perciò il vincolo considerato in D risulterà aperto di consequenza non c'è da sorprendersi se il problema non ammetterà minimo.

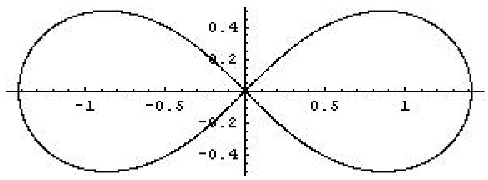

Figura 2: il vincolo $(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0$

Esempio 1 Vogliamo trovare i punti di massima e di minima ordinata per la curva definita implicitamente dall'equazione $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0$.
Questo si può scrivere come un problema di massimo e minimo vincolato per la funzione $G(x,y)=y$ con il vincolo $F(x,y)=0$. Osserviamo (ma non è banale) che l'insieme definito dall' equazione $F(x,y)=0$ è chiuso e limitato (vedi figura 2). Questo significa che ogni funzione continua ammette in questo insieme massimo e minimo. In particolare questo sarà vero per la nostra funzione G. Andiamo a cercare max e min utilizzando la Proposizione 1. Facendo dei semplici calcoli si può osservare che esiste un punto sul vincolo in cui si annulla il gradiente, questo è $(0,0)$. Se vedete il grafico osservate che questo punto è un punto singolare per la curva (un punto doppio) in tal caso non è né punto di massimo né punto di minimo per la funzione G.
Ora andiamo a cercare i nostri candidati attraverso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Quindi vogliamo trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 0+\lambda(4x(x^2+y^2)-4x)=0 \\ 1+\lambda(4y(x^2+y^2)+4y)=0 \\ (x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Cercando di semplificare le cose si parte dalla prima equazione ed escluso il punto $(0,0)$ si ottiene che deve essere $x^2+y^2=1$. Mettendo a sistema questa con la terza equazione si trovano 4 soluzioni $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$.
A questo punto abbiamo 4 candidati ed è semplice osservare che i primi 2 saranno punti di massimo per $G(x,y)=y$ ed i rimanenti 2 punti di minimo.

Esempio 2 Vogliamo trovare gli eventuali punti di massima e di minima ascissa relativi per la curva definita implicitamente dall'equazione $F(x,y)=x^3-3xy+y^3=0$.

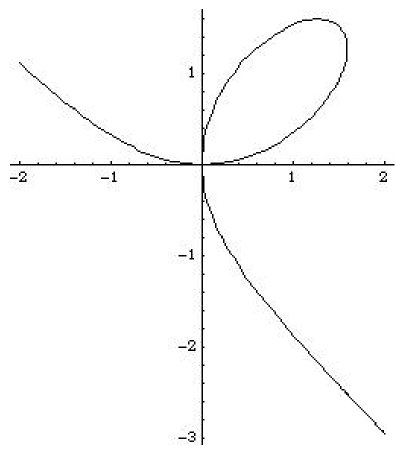

Figura 3: il vincolo $x^3 - 3xy + y^3 = 0$

Anche questo si può scrivere come un problema di massimo e minimo vincolato, in questo caso $G(x, y) = x$. A differenza dell' esempio precedente la curva definita da $F(x, y) = 0$ non sarà limitata. Infatti, utilizzando un po' di algebra, possiamo vedere che fissato un qualsiasi y grande a piacere troviamo sempre almeno un x per cui è verificata l'equazione $F(x, y) = 0$; un equazione algebrica di grado dispari ammette almeno una soluzione reale. Comunque tutto è chiarito dalla figura 3. In questo caso, osserviamo che non esistono massimi e minimi assoluti, dalla figura è evidente. D'altra parte, osserviamo sempre dalla figura 3 che c'è nel primo quadrante un massimo relativo. Allora andiamo a determinarlo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Come nell' Esempio 1, abbiamo che il punto $(0, 0)$ verifica le condizioni i) della Proposizione 1, anche in questo caso si tratta di un punto singolare che non è né massimo né minimo relativo per la funzione G . Quindi cerchiamo la nostra soluzione attraverso il sistema

$$\begin{cases} 1 + \lambda(3x^2 - 3y) = 0 \\ 0 + \lambda(3y^2 - 3x) = 0 \\ x^3 - 3xy + y^3 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Partendo dalla seconda equazione, si ottiene che deve essere $x = y^2$, mettendo a sistema questa con la terza equazione ed escluso il punto $(0, 0)$ già trattato si ottiene un' unica soluzione $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. Questo sarà proprio il punto di massimo relativo per la funzione G sul vincolo.

Osserviamo che, dal momento che non ci interessa ottenere la costante λ, non andremo poi ad utilizzare i valori ottenuti di x e y nella seconda per determinare tale costante, ma dovremo solo osservare che sostituendo tali valori l'equazione 2 ha una soluzione in λ. In certi casi per risolvere il sistema bisognerà passare prima alla determinazione di λ.

Esercizio 2 Trovare i massimi ed minimi assoluti per la funzione $G(x, y) = x - y$ sul vincolo $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

Concludiamo l'argomento enunciando una proposizione che generalizza il metodo dei moltiplicatori di Lagrange al caso di una funzione G a più variabili sottoposta a più vincoli (vedi Courant John Vol II/1 pag. 339).

Proposizione 2 *Sia D un aperto di $\mathbb{R}^n$, date $m+1$ funzioni $F^1, \cdots, F^m$, $G \in C^1(D)$, $m < n$. Condizione* **necessaria** *affinchè un punto $\overline{x} \equiv (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n) \in D$ sia un estremo relativo per la funzione G ristretta ai vincoli*

$$F^1(x_1, \cdots, x_n) = 0,\ F^2(x_1, \cdots, x_n) = 0, \cdots\ F^m(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

è che sia verificata una delle due seguenti condizioni

i) il punto $\overline{x} \in D$ verifica tutti i vincoli. Il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} F^1_{x_1} & F^1_{x_2} & \cdots & F^1_{x_n} \\ F^2_{x_1} & F^2_{x_2} & \cdots & F^2_{x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F^m_{x_1} & F^m_{x_2} & \cdots & F^m_{x_n} \end{pmatrix}$$

calcolata in $\overline{x}$ è strettamente minore di m.

ii) esiste un valore $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \lambda_{02}, \cdots, \lambda_{0m}) \in \mathbb{R}^m$, tale che la funzione

$$H(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) := G(x_1, \cdots, x_n) + \lambda_1 F^1(x_1, \cdots, x_n) + \cdots + \lambda_m F^m(x_1, \cdots, x_n),$$

abbia gradiente nullo nel punto $(\overline{x}, \lambda_0) \in D \times R^m$.

La condizione ii) richiede di risolvere un sistema con $m + n$ equazioni in $m + n$ incognite. Un po' spaventoso e spesso poco maneggevole, comunque nel caso di un vincolo e tre variabili può essere ancora molto utile, come mostrano gli esempi del libro.