

ANALISI VETTORIALE
Prova d'Esame - 17 settembre 2003

1. ESERCIZIO

Sia

$$f(x, y) = y^3 x^2 + y^2 x + y - 1$$

- Verificare che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ con $\varphi(0) = 1$,
- calcolare la derivata prima $\varphi'(0)$,
- calcolare il polinomio di Taylor per la $\varphi(x)$ di ordine $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 0$.

2. ESERCIZIO

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + (-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n$$

- determinare il raggio di convergenza,
- detta $f(x)$ la somma, determinare il $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,
- determinare la somma $f(x)$.

3. ESERCIZIO

Assegnato il campo vettoriale

$$\vec{F} = \{x^2 + 4y^2, x + y\}$$

- Dire se il campo assegnato é conservativo,
- calcolare flusso uscente di \vec{F} relativo al bordo dell'ellisse di equazioni parametriche

$$x(t) = 2 \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

- calcolare l'integrale doppio $\iint_E \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy$, essendo $E : \frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1$.

4. ESERCIZIO

- Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$y' - 3x^2(y^2 - 1) = 0, \quad y(0) = 0$$

- In quale intorno $x \in (\alpha, \beta)$ dell'origine tale soluzione é definita ?

5. ESERCIZIO

Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sqrt[3]{t^2 - 1}}{t^3 - 1} dt$$

- Determinare l'intervallo I di definizione,
- dimostrare che $F(x)$ ha limiti finiti agli estremi dell'intervallo I di definizione.