Esame di Analisi vettoriale - A.A. 2002/03

Esercizio 1. Sia $f_a(x,y) = \sin(x) + e^{x+y} + ax + y^3 + y - 1$
i) verificare che per ogni $a \in R$ in un intorno del punto $(0,0)$ l'equazione $f_a = 0$ definisce in modo implicito la funzione $y_a(x)$ tale che $f_a[x, y_a(x)] = 0$
ii) determinare a in modo tale che la funzione y_a abbia un punto di massimo relativo in 0.
iii) dimostrare che per ogni $a > 1$ la funzione y_a é decrescente in tutto il suo intervallo di definizione.

Esercizio 2. i) Trovare l'integrale generale del seguente problema lineare omogeneo

$$x^2\, y'' + x\, y' - y = 0, \quad x \in (0, +\infty)$$

Suggerimento: si cerchino le soluzioni della forma x^λ con $\lambda \in R$.
ii) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$x^2\, y'' + x\, y' - y = x^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^3 + 1}}\, dt$$

i) determinare l'insieme I di definizione,
ii) provare che $F(x)$ é monotona in I,
iii) dimostrare che $F(x)$ ha limiti finiti agli estremi dell'intervallo I di definizione.

Esercizio 4. Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\sqrt{k!}}$$

i) studiare la convergenza, semplice e uniforme,
ii) scrivere la serie di potenze di e^{x^2} e riconoscere che riesce $f(x) \geq e^{x^2}$

Esercizio 5. Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{cases} \{x, y\} & \text{se} \quad y > x \\ \\ \{y, x\} & \text{se} \quad y \leq x \end{cases}$$

i) Dire se il campo assegnato é di classe C^1 in tutto R^2
ii) calcolare flusso e circuitazione di $\overrightarrow{F}$ sul bordo del quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$
iii) calcolare flusso e circuitazione di $\overrightarrow{F}$ sulla frontiera della regione determinata da $(x-4)^2 + 2y^2 \leq 1$.