Geometria
Appello II — Sessione Invernale — Compito A
Corso di laurea in fisica — a.a. 2019/2020
Tutti i Canali

Durata: 2 ore e 30 minuti

Paolo Bravi Simone Diverio Gabriele Mondello Paolo Piccinni
Riccardo Salvati Manni

4 febbraio 2020

Esercizio 1. Si determinino, nel campo complesso $\mathbb{C}$, tutte le soluzioni per ognuna delle seguenti due equazioni:

$$z^2 = \bar{z}^2 \qquad \text{e} \qquad z^2 = -\bar{z}^2$$

dove $z = a + ib \in \mathbb{C}$ e $\bar{z} = a - ib$ è il suo coniugato.

Esercizio 2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e si considerino i sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbb{R})$:

$$U = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \text{ con } AX = XA \right\}, \quad V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \text{ con } AX = -XA \right\}.$$

Determinare dimensioni e basi dei sottospazi vettoriali $U, V, U \cap V, U + V$.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - 3x_2 - 3x_3,\ 5x_2 + 6x_3,\ -3x_2 - 4x_3).$$

Verificare che F è diagonalizzabile, determinando una base di suoi autovettori e una matrice non singolare C tale che, se A è la matrice di F, $A' = C^{-1}AC$ sia diagonale.

Esercizio 4. Si consideri in $M_2(\mathbb{C})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.
Calcolare la traccia e il determinante di A e dedurne (possibilmente senza polinomio caratteristico) quali sono gli autovalori di A. Si può concludere da ciò se A è diagonalizzabile? A è simmetrica e/o hermitiana e/o unitaria?

Esercizio 5. Si consideri la forma bilineare simmetrica $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 + x_1y_4 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_1.$$

Stabilire se g è definita positiva e determinare, se esiste, un vettore non nullo $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ isotropo rispetto a g, ovvero tale che $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$.

Soluzioni

Esercizio 1. Le due equazioni assegnate si possono riscrivere nel seguente modo:

$$z^2 - \bar{z}^2 = (z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 0 \qquad \text{e} \qquad z^2 + \bar{z}^2 = (z + i\bar{z})(z - i\bar{z}) = 0.$$

Esplicitando in parte reale e immaginaria abbiamo:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad i\bar{z} = y + ix.$$

Ne segue

$$z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = 2iy, \quad z + i\bar{z} = (x + y) + i(x + y), \quad z - i\bar{z} = (x - y) + i(x - y).$$

Dunque le due equazioni si possono riscrivere cosí:

$$(z + \bar{z})(z - \bar{z}) = (2x)(2iy) = 0 \qquad \text{e} \qquad (z + i\bar{z})(z - i\bar{z}) = [(x + y) + i(x + y)][(x - y) + i(x - y)] = 0.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni della prima equazione consiste della coppia degli assi coordinati: $xy = 0$ ($x = 0$, ovvero numeri immaginari puri, e $y = 0$, ovvero reali puri). L'insieme delle soluzioni della seconda equazione consiste invece delle due bisettici dei quadranti del piano cartesiano: $x + y = 0$ e $x - y = 0$.

Esercizio 2. Eseguendo i prodotti AX e XA abbiamo:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad XA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 \\ x_3 & x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Ne seguono le equazioni dei sottospazi vettoriali U e V:

$$U : \begin{cases} x_1 + x_3 = x_1 \\ x_2 + x_4 = x_1 + x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_3 + x_4 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad V : \begin{cases} x_1 + x_3 = -x_1 \\ x_2 + x_4 = -x_1 - x_2 \\ x_3 = -x_3 \\ x_4 = -x_3 - x_4 \end{cases}$$

Ne seguono le equazioni semplificate

$$U : x_3 = 0, x_1 = x_4 \qquad \text{e} \qquad V : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

e che

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & t \end{pmatrix} \right\}$$

ha dimensione 2 e base data dalle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. V è invece il sottospazio vettoriale nullo, di dimensione 0. Pertanto $U + V = U$ (con la stessa base e dimensione di U) e $U \cap V = V$ è il sottospazio vettoriale nullo.

Esercizio 3. La matrice associata a F rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

da cui l'equazione caratteristica di F

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ 0 & 5-\lambda & 6 \\ 0 & -3 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0,$$

e gli autovalori $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 1. Scriviamo ora le equazioni dei rispettivi autospazi. Per $\lambda_1 = -1$ si ha:

$$V_{\lambda_1} : \begin{cases} -3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_2 + 6x_3 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

e quindi $V_{\lambda_1} = \{(t_1, t_2, -t_2)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}} = \{t_1(1,0,0) + t_2(0,1,-1)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}}$. Una base di V_{λ_1} è dunque costituita dagli autovettori $\vec{v}_1' = (1,0,0), \vec{v}_2' = (0,1,-1)$. Si ha allora $\dim V_{\lambda_1} = 2$ e quindi la molteplicità geometrica di λ_1 è 2. Si ha poi, per $\lambda_2 = 2$:

$$V_{\lambda_2} : \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases},$$

e quindi $V_{\lambda_2} = \{t(1,-2,1)\}_{t \in \mathbf{R}}$. Una base di V_{λ_2} è data dall' autovettore $\vec{v}_3' = (1,-2,1)$, e $\dim V_{\lambda_2} = 1$ e quindi la molteplicità geometrica di λ_2 è 1. Ne segue che F è diagonalizzabile.

Una base di V, costituita da autovettori di F è dunque $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3')$. La matrice associata a F rispetto a tale base è la matrice diagonale

$$A' : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Una matrice non singolare C tale che $A' = C^{-1}AC$ è la matrice che ha per colonne rispettivamente le coordinate dei vettori $\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3'$ nella base canonica. Pertanto:

$$C : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Traccia e determinante di A sono entrambi nulli:

$$tr\, A = 1 - 1 = 0, \quad \det A = 1(-1) - i^2 = -1 + 1 = 0.$$

Ne segue che i due autovalori complessi λ_1, λ_2 di A hanno somma e prodotto nulli: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 = 0$, e pertanto $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Se A fosse diagonalizzable, essa dovrebbe quindi essere simile alla matrice nulla $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, che evidentemente è simile solo a se stessa. Ne segue che A non è diagonalizzabile.

Per completare le risposte, si osservi che

$$A^t = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} = A, \qquad \overline{A}^t = \begin{pmatrix} -2 & -2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix} \neq A,$$

$$A\overline{A}^t = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \neq I,$$

e quindi A è simmetrica, non hermitiana e non unitaria.

Esercizio 5. La forma quadratica associata a g è

$$g(\vec{x}, \vec{x}) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_4.$$

Da essa vediamo subito che g non è definita positiva. Risulta infatti che p. es. scegliendo $\vec{x} = (1,0,0,-2)$ risulta $g(\vec{x}, \vec{x}) = 3 - 4 = -1 < 0$ e per $\vec{x} = (0,0,0,1)$ si ha l'esempio richiesto di vettore isotropo non nullo: $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$.