Esercizio 1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' operatore associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori dell' applicazione T.

(b) Verificare se T è diagonalizzabile.

(c) Verificare se le matrici A e B con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

sono simili.

Soluzione: Si calcola il polinomio caratteristico

$$p_T(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & -1-t & 4 \\ 0 & -1 & 3-t \end{pmatrix} = -(t-1)^3$$

a) Autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 3.

b)Calcoliamo la molteplicità geometrica la matrice $A - I_3$ ha rango 2, quindi la molteplicità geometrica è 1. Non diagonalizza

c) la matrice $B - I_3$ ha rango 1, quindi A e B non sono simili.

Esercizio 2. Sia $V \subset Mat_{2,2}(\mathbb{R})$ il sottospazio generato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia $W \subset \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$ il sottospazio formato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con

$$c - b + a = 0, \quad 2a - c + d = 0, \quad a + 3b - 5c + 2d = 0.$$

(a) Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio V.

(b) Calcolare la dimensione di V e di W.

(c) Verificare che

$$\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) = V + W.$$

Soluzione: a) Sviluppando dei semplici conti oppure osservando che la coordinata $b = 0$ e $a = c$ per entrambi i generatori dello spazio V otteniamo le equazioni cartesiane.

b) La dimensione di V è 2, perché le due matrici sono indipendenti. Riguardo alla dimensione di W, facendo una riduzione a scala, si vede che la terza equazione è combinazione delle prime 2 , quindi anche W ha dimensione 2.

c) Usiamo la formula di Grassmann e calcoliamo la dimensione dell' intersezione che ha equazioni

$$b = 0, \quad , a - c = 0, \quad c - b + a = 0, \quad 2a - c + d = 0.$$

L' unica soluzione è la soluzione nulla , quindi $\dim V + W = 4 = \dim \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Discutere, al variare dei parametri a e b, il seguente sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = b \\ 2x - ay + 2z = 7b \\ -x + 3y + az = 0. \end{cases}.$$

Determinare la soluzione nel caso $a = b = 1$.

Soluzione: Procediamo con la riduzione a scala del sistema, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & b \\ 2 & -a & 2 & 7b \\ -1 & 3 & a & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & 1 & a+1 & b \\ 0 & -a+4 & 0 & 5b \end{pmatrix}$$

;

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & 1 & a+1 & b \\ 0 & 0 & (a-4)(a+1) & 5b + (a-4)b \end{pmatrix}$$

;

Allora il sistema ha un'unica soluzione quando $a \neq 4, -1$.
Quando $a = 4$ il sistema ha ∞ soluzioni quando $b = 0$ e nessuna soluzione per $b \neq 0$
Quando $a = 1$, l' ultima equazione scompare e quindi si hanno sempre ∞ soluzioni.

Quando $a = b = 1$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e conseguentemente $y = 5/3,\ z = -1/3, x = 14/3$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^2[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ e sia $\langle\, ,\, \rangle$ la forma bilineare simmetrica $V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(0)q(0) - p'(0)q''(0) - q'(0)p''(0) + p''(0)q(0) + p(0)q''(0)\,,$$

dove $p'(t)$ e $p''(t)$ indicano la derivata prima e la derivata seconda di $p(t)$, rispettivamente.

1. Determinare la matrice associata a $\langle\, ,\, \rangle$ rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$.
2. Determinare la segnatura di $\langle\, ,\, \rangle$.
3. Trovare una base ortonormale generalizzata.

Risoluzione:
1) Bisogna determinare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \langle 1,1 \rangle & \langle 1,t \rangle & \langle 1,t^2 \rangle \\ \langle t,1 \rangle & \langle t,t \rangle & \langle t,t^2 \rangle \\ \langle t^2,1 \rangle & \langle t^2,t \rangle & \langle t^2,t^2 \rangle \end{pmatrix}$$

Da un semplice conto, otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Per la segnatura possiamo procedere in vari modi : calcolare il polinomio caratteristico e studiare i cambi di segni: sono 2, il termine noto è diverso da 0 , quindi la segnatura è $(2, 1)$. Altrimenti si puó procedere in modo diverso. Il determinante di A è -4, quindi le possibili segnature possono essere $(2, 1)$

oppure $(0,3)$. Il secondo caso non è possibile, perché $\langle 1,1\rangle = 1$ ci dice che il prodotto non è definito negativo.
3) Base ortonormale : partiamo dalla base $1, t, t^2$ e applichiamo Gram - Schmidt generalizzato Allora $v_1 = 1$. Poiché $\langle 1, t\rangle = 0$, abbiamo che $1, t$ sono ortogonali, ma $\langle t, t\rangle = 0$ ferma il processo , allora dobbiamo prendere t^2 come secondo vettore e procedere. Osservando la matrice A otteniamo che $v_2 = t^2 - 2$ è ortogonale a v_1, inoltre $\langle v_2, v_2\rangle = -4$.
Adesso possiamo usare t e abbiamo

$$v_3 = t - \frac{\langle 1, t\rangle}{\langle 1, 1\rangle} - \frac{\langle t, t^2 - 2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} = t - 1/2, \quad \text{e} \quad \langle v_3, v_3\rangle = \frac{1}{4}.$$

Quindi $u_1 = v_1, u_2 = 2v_3, u_3 = \frac{v_2}{2}$ è una base ortonormale generalizzata.