Geometria
Appello I — Sessione Invernale
Corso di laurea in fisica — A.A 2018/2019
Canali A – C, L–Pa, Pb – Z

Durata: 2 ore e 30 minuti

Alessandro D'Andrea Simone Diverio Paolo Piccinni
Riccardo Salvati Manni

21 gennaio 2019

Esercizio 1. Dire per quali valori del parametro reale k il sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} kx + y - 2z = 1 \\ (1-k^2)x + 3k\,z = 2k - 1 \\ (k^2+1)x + (k+1)y - 2z = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale a 2 e sia

$$T\colon \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$$

l'applicazione lineare definita da

$$T(p)(t) = p\big(\sqrt{2}\big)t^2 + p(0)t + p'(t).$$

Verificare che T non è un isomorfismo. Determinare una base di $\ker T$.

Esercizio 3. Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine due ad elementi complessi. Stabilire, giustificando ogni risposta, se i seguenti sottoinsiemi $U_1, \dots, U_7 \subseteq V$ sono sottospazi vettoriali, e in caso affermativo indicarne la dimensione.

(i) $U_1 = \{A \in V \mid \operatorname{tr} A = 0\}$.

(ii) $U_2 = \{A \in V \mid \det A = 0\}$.

(iii) $U_3 = U_1 \cap U_2$.

(iv) $U_4 = \{A = (a_{ij}) \in V \mid a_{12} = a_{21} = 0\}$.

(v) $U_5 = U_1 \cap U_4$.

(vi) $U_6 = \{A \in V \mid \exists\, C \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})\ \text{tale che}\ C^{-1}AC \in U_4\}$.

(vii) $U_7 = \{A \in V \mid p_A(\lambda)\ \text{ha tutte le radici reali}\}$.

Esercizio 4. Si consideri $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ munito del prodotto scalare definito positivo $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$. Siano $U, V \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$U = \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \mid p(1) = 0\}, \quad V = \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \mid p(2) = 0\}.$$

Determinare una base per $W = U \cap V$, la dimensione di $U + V$, ed una base per il sottospazio $W^{\perp}$.

Esercizio 5. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dire perché A è diagonalizzabile e determinare una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$, di autovettori.

Soluzioni

Esercizio 1. Scriviamo la matrice dei coefficienti delle incognite e la matrice completa:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 1-k^2 & 0 & 3k \\ k^2+1 & k+1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 1 \\ 1-k^2 & 0 & 3k & 2k-1 \\ k^2+1 & k+1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouché–Capelli, il sistema ha soluzione esattamente quando i ranghi delle due matrici coincidono, e si vede abbastanza facilmente che se non coincidono, il rango di B è 1 in più di quello di A.

Calcoliamo il determinante di A per trovare i valori di k per i quali A ha rango 3.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 1-k^2 & 0 & 3k \\ k^2+1 & k+1 & -2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ 1-k^2 & 0 & 3k \\ 1-k & 0 & 2k \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1-k^2 & 3k \\ 1-k & 2k \end{pmatrix} \\ &= -2(1-k^2)k + 3(1-k)k \\ &= -k(1-k)(2+2k-3) = -k(1-k)(2k-1), \end{aligned}$$

che si annulla per $k = 0, 1/2, 1$.

Pertanto, se k è diverso da tali tre valori, A ha rango 3, e così anche B, e il sistema ha un'unica soluzione.

Per quanto riguarda i casi $k = 0, 1/2, 1$, la cosa migliore è sostituire e verificare che cosa succeda. Per $k = 0$ le matrici diventano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

e si vede subito che in entrambe la terza riga è la somma delle prime due. Pertanto A e B hanno entrambe rango 2, e il sistema ammette soluzione.

Per $k = 1/2$ le matrici diventano

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -2 \\ 3/4 & 0 & 3/2 \\ 5/4 & 3/2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -2 & 1 \\ 3/4 & 0 & 3/2 & 0 \\ 5/4 & 3/2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A, che non ha rango 3, ha allora rango 2, mentre il minore 3×3 di destra della matrice B ha determinante $-9/4$ e quindi B ha rango 3. Il sistema non ha quindi soluzioni per $k = 1/2$.

Se $k = 1$, allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una rapida eliminazione di Gauss sulla matrice B conduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

mostrando che il sistema non ha soluzioni.

Esercizio 2. Fissiamo la base $1, t, t^2$ la matrice che rappresenta T è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

La prima e la terza colonna sono proporzionali, quindi T non è un isomorfismo. Una base per $\ker T$ è data da una soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + 2z = 0. \end{cases}$$

Ad esempio $v = (-2, 0, 1)^t$.

Esercizio 3. Quesiti (i), (iv), (v). I sottoinsiemi U_1, U_4, U_5 sono sottospazi vettoriali di $M_{2,2}(\mathbb{C})$. Se $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sono le coordinate in $M_{2,2}(\mathbb{C})$ (rispetto alla base canonica delle matrici), essi si rappresentano con equazioni lineari omogenee o sistemi lineari omogenei, rispettivamente

$U_1 : a_{11} + a_{22} = 0,\ U_4 : a_{12} = 0, a_{21} = 0,\ U_5 : a_{11} + a_{22} = 0, a_{12} = 0, a_{21} = 0.$

Quesiti (ii), (iii). I sottoinsiemi U_2, U_3 non sono sottospazi vettoriali di $M_{2,2}(\mathbb{C})$. Si verifica infatti con semplici controesempi che essi non sono chiusi rispetto alla somma. Per esempio

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono sia in U_2 che in U_3, ma la loro somma

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

non è né in U_2 né in U_3.

Quesiti (vi), (vii). Anche i sottoinsiemi U_6, U_7 non sono sottospazi vettoriali di $M_{2,2}(\mathbb{C})$. Un controesempio che mostra che U_6 non è chiuso rispetto alla somma è dato dalle matrici

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con autovalori distinti risp. $1, 2$ e $1, -1$ e dunque entrambe diagonalizzabili. La loro somma tuttavia $B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile. Per quanto riguarda U_7, si considerino p. es.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

entrambe con autovalori reali $1, -1$. La somma $C_1 + C_2 == \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ ha traccia nulla e determinante i, e dunque non ha autovalori reali.

Esercizio 4. Il sottospazio W è dato da tutti e soli i polinomi di grado minore o uguale a due tali che $p(1) = p(2) = 0$. Per il Teorema di Ruffini ad esempio, un tale polinomio è necessariamente della forma $\lambda(x-1)(x-2)$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Dunque $W = \operatorname{Span}\{(x-1)(x-2)\}$, e dunque $\dim W = 1$.

Inoltre, sia U che V hanno dimensione $2 = 3 - 1$, essendo entrambi descritti da una sola equazione lineare non nulla nei coefficienti del polinomio. La Formula di Grassmann ci fornisce dunque

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 3,$$

cioè $U + V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Infine, un polinomio è perpendicolare a W se e solo se $\langle (x-1)(x-2), q\rangle = 0$. Ma $\langle (x-1)(x-2), q\rangle = 2q(0)$. Quindi $W^{\perp}$ consiste esattamente nei polinomi di grado minore o uguale a due con termine noto nullo, e dunque $W^{\perp} = \mathrm{Span}\{x, x^2\}$.

Esercizio 5. Per il Teorema Spettrale A è diagonalizzabile, essendo simmetrica. Il polinomio caratteristico è $p_A(t) = (3-t)(t^2 - 6t + 7)$. Quindi, gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3 - \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 3 + \sqrt{2}.$$

Una base di autovettori —automaticamente ortogonale— è data da

$$(1, 0 - 1)^t, \quad (1, -\sqrt{2}, 1)^t, \quad (1, \sqrt{2}, 1)^t.$$

Per ottenere una base ortonormale di autovettori è dunque sufficiente normalizzare le lunghezze della base appena data, ottenendo

$$(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^t, \quad (1/2, -\sqrt{2}/2, 1/2)^t, \quad (1/2, \sqrt{2}/2, 1/2)^t.$$