Esercizio: Si consideri la curva

$$\mathcal{C} = \{ [X,Y,Z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid Z^3Y + X^3Z + XY^3 = 0 \}$$

Verificare che $\mathcal{C}$ è non singolare

Si consideri l'applicazione da $\mathcal{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ data da Z/X trovare i punti la cui immagine è 0 o ∞.

Sol: Vediamo la curva $\mathcal{C}$ sulle carte locali

In $U_2 \subseteq \mathbb{P}^2$ abbiamo $\mathcal{C} \cap U_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 / \; Y + X^3 + XY^3 = 0$

$$\begin{cases} f(x,y) = y + x^3 + yx^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2(1+y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 + x^3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies x^3 = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \implies x = 0 \text{ oppure } y = -1$$

Soluzioni incompatibili con $f(x,y) = 0$

Quindi i punti di $\mathcal{C} \cap U_2$ sono lisci

Adesso in $\mathcal{C} \cap U_0$ e $\mathcal{C} \cap U_1$ abbiamo espressioni simili. Infatti in $\mathcal{C} \cap U_0$ abbiamo

$$g(u,v) = u^3 + v + uv^3 = 0$$

Quindi $\mathcal{C}$ è non singolare.

$$\mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

z/x questa è una funzione meromorfa su $\mathcal{C}$ semplicemente perché lo è localmente

infatti possiamo usare il Teorema delle funzioni implicite e localmente in U_1 possiamo scrivere $z = f(x)$ $\quad z/x = f(x)/x$.

Adesso $F : \mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$

funzione meromorfa è un'applicazione analitica

Infatti vediamo cosa succede sulle carte locali

U_α carta locale di $\mathcal{C}$

Se F è regolare in $\mathcal{C}$ $\Rightarrow F: U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$

F olomorfa

Supponiamo che in un punto di U_α F abbia un polo. Restringendo ulteriormente la carta possiamo supporre che sia l'unico polo. e inoltre che il polo sia in 0.

i.e $f(z) = F \circ \varphi_\alpha^{-1}(z) = \underset{0\neq}{a_{-k}} z^{-k} + \dots \; a_{-1} z^{-1} + f(z)$

questo ci dice che ~~se~~ $f(z)$ ha un polo di ordine k in $z=0$ $\quad z^k f(z)$ regolare. intorno a 0 e assume il valore a_{-k}.

Quindi $\dfrac{1}{z^k f(z)}$ è regolare intorno a 0.

anzi $\dfrac{1}{f(z)}$ ha uno zero di ordine k.

Ma adesso avevamo $f(0) = \infty$

Sia U un intorno di $\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Carte locale

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\psi_U} & \mathbb{C} \\ w & \longrightarrow & \frac{1}{w} \\ \infty & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(4)

allora $\psi_U \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}(z) = \psi_U f(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ ha uno zero di ordine k. ~~...~~ e quindi l'applicazione è analitica.

$$Z/X : \mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

Poli $X = 0 \Rightarrow Z^3 = 0$ oppure $Y = 0$

$Y = 0 \Rightarrow [0,0,1]$ molteplicità 1

$Z = 0 \Rightarrow [0,1,0]$ molteplicità 3 (?) vedi zeri
$-1/2$
$2+1=3$

<u>Zeri</u> $Z = 0 \Rightarrow Y^3 = 0$ oppure $X = 0$.

$[0,1,0]$ molteplicità $\cancel{1}$.

$[1,0,0]$ molteplicità 3.

Analiticamente

In $\mathcal{C} \cap U_1 \ni [0,1,0]$ equazione ⑤

$$z^3 + x^3 z + x = 0 \qquad x = -(z^3 + x^3 z).$$

$$\frac{z}{x} = \frac{-1}{z^2 + x^3} \leftarrow \quad \text{svanimento } \underline{2}$$

Esercizio: Si consideri la curva

$$C = \{ [X,Y,Z] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C} \;/\; X^2Y^2 + Y^2Z^2 + X^2Z^2 = 0 \}$$

Desingolarizzare la curva $\mathcal{C}$.

Sia X la superficie di Riemann compatta associata alla curva $\mathcal{C}$ si consideri l'applicazione $f: X \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ data da $\frac{Z}{X}$.

Trovare l'immagine dei punti dello scoppiamento

Soluzione: Completa simmetria nella <u>curva</u> Vediamo in $\mathcal{C} \cap U_2$

Equazione

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 = 0$$

Punto $O=(0,0)$ è singolare unico punto.

Quindi i punti

$P_0 = [0,0,1]$, $\underset{Q_0}{\overset{\shortparallel}{[0,1,0]}}$, $\underset{R_0}{\overset{\shortparallel}{[1,0,0]}}$ sono 3 punti singolari

Vediamo cosa succede in un caso $\underline{P_0}$

Consideriamo lo scoppiamento in una carta locale

$x = yt$.

$$\begin{cases} y^2(y^2t^2+t^2+1) = 0 \\ \end{cases}$$

Eq locale
Curva scoppiata
con la retta
eccezionale
$\underline{y=0}$

Equazione locale della curva

$$y^2t^2+t^2+1 = 0$$

Incontra la retta eccezionale in $y=0$

$t = \pm i$

Sopra il punto P_0 ci sono
i punti $(x,t) = (0,\pm i)$
lisci

Vediamo nell'altra carta

$y = xu$

$x^2(x^2u^2 + u^2 + 1) = 0$ Tutto come prima

punti $(y, u) = (0, \pm i)$

Osservazione $y = xu$ e $x = yt$ dicono

che nell'intersezione $u = 1/t$. allora.

i punti sono gli stessi di prima solo che

$(x, t) = (0, i) = (0, -i) = (y, u)$

Z/X nella carta locale $x = 0$, $z = 1$

i Punti $P_1, P_2 \longrightarrow \infty$.

~~Nella~~ Sopra a $[0, 1, 0]$

abbiamo che Z/X deve essere valutata nei

punti Q_1 e Q_2 i valori saranno $\pm i$

Sopra a $[1, 0, 0]$ i punti sono R_1 e R_2
il valore 0.