LEZIONE 1.

Appunti sulla mia pagina WEB

WWW1.mat.uniroma1./people/salvati

Ist. Geom. Sup.

Cap 5 : Nozioni di topologia algebrica

Dato R anello commutativo con unità $[\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_m]$

vogliamo costruire un funtore covariante

$$H_n : \{\text{Spazi topologici}\} \longrightarrow \{R \text{ moduli}\}$$

$n \in \mathbb{N}$.

$$X \longrightarrow H_n(X, R)$$

$f : X \to Y$ applicazione continua $\qquad g : Y \longrightarrow Z$

$H_n(f) : H_n(X, R) \longrightarrow H_n(Y, R)$

$H_n(g \circ f) = H_n(g) H_n(f)$

$H_n(id_X) = 1_{H_n(X,R)}$

<u>Definizione</u>: $\Delta_k = \{(x_1 \dots x_k) \in \mathbb{R}^k / x_i \geq 0, \sum_i x_i \leq 1\}$

Δ_0 $\quad$ ${}^0\Delta_1{}^1$ $\quad$ Δ_2 $\qquad$ k - simplesso standard

X spazio topologico

$$\sigma_k : \underset{\text{continua}}{\Delta_k \longrightarrow X} \qquad k\text{-simplesso singolare.}$$

omesso

$$C_k(X,R) = \left\{ \sum r_i \sigma_i^{(k)} \;\middle|\; r_i \in R \quad \sigma_i^{(k)} \ k\text{-simplesso singolare} \right\}$$

Comb. lineari formali finite a coeff. in R.

$$C_k(f) : C_k(X,R) \longrightarrow C_k(Y,R)$$
$$\sigma = \sum_i r_i \sigma_i \longrightarrow \sum_i r_i (f \circ \sigma_i)$$

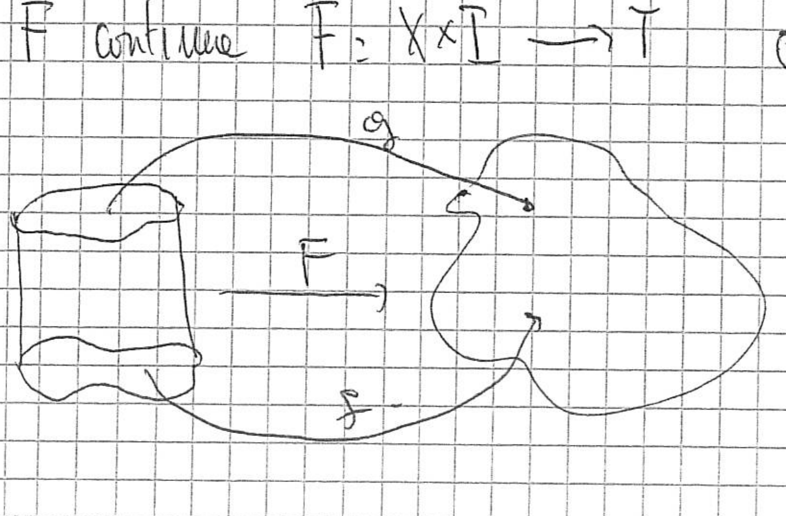
$$C_k(1d_X) = 1_{C_k(X,R)} \qquad C_k(f \circ g) = C_k(f) \circ C_k(g)$$

$C_k(X,R)$ è un funtore invariante per omeomorfismi

Qualcosa più fine. Vogliamo invarianza omotopica

$f,g : X \longrightarrow Y$ omotopicamente equivalenti se

$\exists F$ continua $F : X \times I \longrightarrow Y$ con $\begin{cases} F(x,0) = f(x) \\ F(x,1) = g(x) \end{cases}$



scriviamo

$F : f \simeq g$.

X, Y sono omotopicamente equivalenti se esistono

$$f : X \to Y \quad , \quad g : Y \to X \quad \text{continue}.$$

che sono una l'inversa dell'altra a meno di omotopia, i.e.

$$g \circ f \simeq id_X \qquad f \circ g \sim id_Y .$$

Si verifica che quella di omotopia è una relazione di equivalenza

Esempi $\overline{\Delta} = \{ z \in \mathbb{C} \;/\; |z| \leq 1 \} \sim \text{pto}$

$$\overline{\Delta} \setminus \{0\} \sim S^1 = \{ |z| = 1 \}$$

$$S^1 \xrightarrow{i} \overline{\Delta} \setminus \{0\} \xrightarrow{r} S^1$$

$$x \longrightarrow x$$

$$y \longrightarrow y/|y|$$

Ovviamente $r \circ i = id_{S_1}$.

$$i \circ r\,(y) \to y/|y| \simeq id_{(\overline{\Delta} \setminus \{0\})}$$

$$F : \overline{\Delta} \setminus \{0\} \times I \longrightarrow \overline{\Delta} \setminus \{0\}$$

$$F(y, t) = ty + (1-t)\, y/|y|$$

$$F(y, 0) = i \circ r . \qquad F(y, 0) = id .$$

Vogliamo

$$\partial = \partial_k : C_k(X,R) \longrightarrow C_{k-1}(X,R)$$

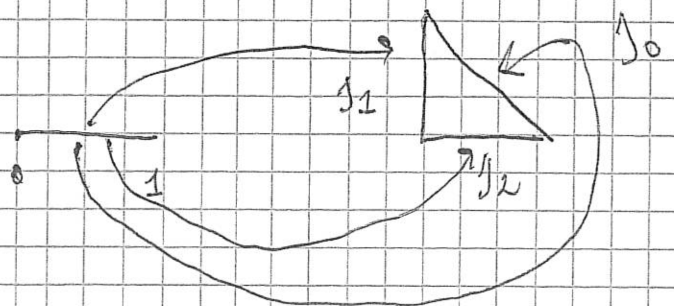
operatore di bordo

Δ_k simplesso standard.

$$j_s = j_s^k : \Delta_{k-1} \longrightarrow \Delta_k$$

$$(x_1 \dots x_{k-1}) \to (x_1 \dots x_{s-1}, 0 \dots x_{k-1}) \quad s \neq 0$$

$$j_0(x_1 \dots x_{k-1}) = \left(1-\textstyle\sum_i x_i, x_1, \dots x_{k-1}\right)$$



$\sigma : \Delta_k \longrightarrow X$

$$\partial\sigma = \begin{cases} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \sigma \circ j_s \in C_{k-1}(X,R) \\ 0 & \text{se } k=0 \end{cases}$$

bordo di σ

Estendiamo per linearità a $C_k(X,R)$

$$\boxed{\partial^2 = 0} \qquad \partial^2 = \partial_{k-1} \circ \partial_k.$$

Dim $\quad \partial^2\sigma = \partial \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \sigma \circ j_s^k = \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^{s+t} \sigma \circ j_s^k j_t^{k-1}$

$$j_s^k j_t^{k-1}(x_1 \dots x_{k-2}) = j_s^k(x_1 \dots x_{t-1}, 0, x_t \dots x_{k-2}) =$$

$$x_1 \dots x_{t-1}, 0, \dots, x_{s-2}, 0, x_{s-1} \dots x_{k-2}) =$$

$$j_t^k j_{s-1}^{k-1}(x_1 \dots x_{k-2})$$

$t=0 \quad s>1$

$$j_s^k j_0^{k-1}(x_1 \dots x_{k-2}) = j_s^k\left(1 - \sum_{i=1}^{k} x_i, x_1 \dots x_k\right) = \left(1 - \sum x_i, x_1, x_{s-1}, 0, x_s \dots x\right.$$

$$= j_0^k j_{s-1}^{k-1}(x_1 \dots x_{k-2})$$

$\boxed{t=0, s=1}$ $$j_1^k j_0^{k-1}(x_1 \dots x_{k-2}) = (0, 1 - \sum x_i, x_1 \dots x_{k-2}) =$$

$$j_0^k j_0^{k-1}(x_1 \dots x_{k-2})$$

Quindi per l'alternanza dei segni abbiamo somma è 0.

$$\partial^2 \sigma = \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^{s+t} \sigma j_s^k j_t^{k-1} =$$

$$\sum_{0 < t \leq s \leq k} (-1)^{s+t} \sigma j_s^k j_t^{k-1} + \sum_{k-1 \geq t \geq s \geq 0} (-1)^{s+t} \sigma j_s^k j_t^{k-1} =$$

$$= \sum_{k-1 \geq u \geq v \geq 0} (-1)^{u+v+1} \sigma j_v^k j_u^{k-1} + \sum_{k-1 \geq t \geq s \geq 0} (-1)^{s+t} \sigma \circ j_s^k j_t^{k-1} = 0$$

Abbiamo il complesso delle catene singolari

$$C_{k+1}(X, R) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X, R) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X, R)$$

$Im(\partial_{k+1}) \subseteq Ker\, \partial_k$.
k-bordi k-cicli.

$$Z_k(X,R) := Ker\, \partial_k \qquad B_k(X,R) = Im(\partial_{k+1})$$
$$\overset{\shortparallel}{\{c \,/\, \partial c = 0\}} \qquad \overset{\shortparallel}{\{c \,/\, c = \partial_{k+1}\gamma\}}$$

$$H_k(X,R) = Z_k(X,R) \big/ B_k(X,R)$$

Proprietà:

$f: X \to Y$ continua.

$$\begin{array}{ccc} C_k(X) & \xrightarrow{C_k(f)} & C_k(Y) \\ \downarrow \partial_k & & \downarrow \partial_k \\ C_{k-1}(X) & \xrightarrow{C_{k-1}(f)} & C_{k-1}(Y) \end{array} \qquad \#$$

$$C_k(f)\, Z_k(X) \subseteq Z_k(Y)$$
$$C_k(f)\, B_k(X) \subseteq B_k(Y) \implies H_k(f) : H_k(X) \to H_k(Y)$$
$$H_k(f) = f_*$$

Inoltre $f_* \partial = \partial f_*$.

LEZIONE 12.

Omologia singolare è un invariante topologico (per omeomorfismi).

X connesso x archi $\Rightarrow H_0(X,R) = R$.

$$C_0(X,R) = Z_0(X,R)$$

$$\varphi : Z_0(X,R) \longrightarrow R$$

$$\sum a_i P_i \longrightarrow \sum_i a_i$$

P_i = punti di X

$$\ker \varphi = B_0(X,R)$$

$$0 = \sum_i a_i \Rightarrow \sum_i a_i P_i = \sum_i a_i (P_i - P_0) =$$

$$\partial(\sum_i a_i \sigma_i) = \quad \sigma_i(0) = P_0 \quad \sigma_i(1) = P_1.$$

Ovviamente ogni bordo ha $\sum_i a_i = 0$

$H_0(X,R) = R^k$ quante le componenti connesse per archi.

Omologia del punto

$$p \quad C_k(X,R) = R\sigma_k \qquad \sigma_k(\Delta_k) = p.$$

$$\partial\sigma_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma_k \circ J_i = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari } k=0 \\ 1_{C_k} \end{cases}$$

Quindi abbiamo $\ker \partial_k = \operatorname{Im} \partial_{k+1} \overset{= C_k}{0}$ k pari

$\ker \partial_k = \operatorname{Im}(\partial_{k+1}) = C_k(X)$

$$H_p\{p\} = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ \mathbb{R} & k = 0 \end{cases}$$

Esercizio

$f : S^1 \longrightarrow X$ omotopa all'applicazione costante $\Leftrightarrow$ estende a $g : \overline{D} \longrightarrow X$

$f \sim c_p \qquad F(x,t) : S^1 \times I \longrightarrow X$

$F(x,0) = c_p$

$F(x,1) = f$

$$g : \begin{array}{l} S^1 \times I \longrightarrow \overline{D} \\ (x,\ t) \longrightarrow tx \end{array}$$

Sia $G : \overline{D} \longrightarrow X$

$tx \longrightarrow F(x,t)$

Esercizio S^n e $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sono omotopicamente equivalenti

$$S^n \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \qquad , \qquad \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{p} S^n$$
$$x \longmapsto x \qquad\qquad\qquad y \longrightarrow y/|y|$$

$$p \circ i : S^n \longrightarrow S^n \quad \text{è l'identità}$$
$$x \longmapsto x.$$

$$i \circ p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}.$$
$$y \longmapsto y/|y|$$

$$F(x,t) : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$
$$(x,t) \longrightarrow \left(tx + (1-t)\frac{x}{|x|} \right)$$

$$F(x,0) = i \circ p. \qquad F(x,1) = id.$$

Esercizio $\mathbb{P}^n \setminus [0 \dots 0, 1]$ e $\mathbb{P}$ sono omot. equiv.

$$\mathbb{P}^{n-1} \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^n \setminus [0 \dots 0 \, 1] \xrightarrow{p} \mathbb{P}^{n-1}$$

$$[x_0 \dots x_{n-1}] \xrightarrow{i} [x_0 \dots x_{n-1}, 0]$$

$$[x_0 \dots x_{n-1}, x_n] \xrightarrow{p} [x_0 \dots x_{n-1}]$$

Ovviamente $p \circ i = id$.

$$i \circ p \sim id_{\mathbb{P}^n \setminus \{[0 \dots 0, 1]\}}$$

$$F(t, x) = [x_0 \dots x_{n-1}, t x_n]$$

8

STRUMENTO ESSENZIALE per il CALCOLO $H_k(X,R)$

Teorema (di Invarianza omotopica)

$f, g : X \to Y$ continue $f \sim g$. Allora $\forall k \geq 0$

$$f_* = g_* : H_*(X,R) \to H_*(Y,R)$$

CONSEGUENZA

$X \simeq Y$, i.e. $\exists\, \alpha, \beta$ $\quad \alpha : X \to Y$, $\beta : Y \to X$ continue.

$\beta\alpha \simeq 1_X$, $\quad \alpha \circ \beta \simeq 1_Y$.

Allora $(\beta\alpha)_* = (1_X)_*$; $(\alpha\beta)_* = (1_Y)_*$.

$$(\beta_*)(\alpha_*) = 1_{H_k(X)} \quad (\alpha_*)(\beta_*) = 1_{H_k(Y)}$$

$H_k(X)$ e $H_k(Y)$ sono isomorfi.

<u>Dimostrazione</u>:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{k+1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "f_*"'] \arrow[d, shift left, "g_*"] & C_k(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "f_*"'] \arrow[d, shift left, "g_*"] \arrow[dl, dashed, "J_k"'] & C_{k-1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "f_*"'] \arrow[d, shift left, "g_*"] \arrow[dl, dashed, "J_{k-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{k+1}(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_k(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_{k-1}(Y) &
\end{tikzcd}$$

Supponiamo che $\forall k \geq 0$ esiste

$$J_k : C_k(X) \longrightarrow C_{k+1}(Y)$$

t.c.

$$\boxed{J_{k-1}\partial + \partial J_k = f_* - g_*}$$

Allora il teorema è dimostrato

Data $[c] \in H_k(X)$ $\quad c \in Z_k(X)$

$$f_*[c] = [f_* c] = [g_* c + J_{k-1}\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\partial c} + \partial J_k c] =$$

$$[g_* c + \partial J_k c] = [g_* c] = g_*[c].$$

Abbiamo bisogno di un

Lemma Tecnico: X convesso allora $H_k(X) = 0$ $\quad k \geq 1$.

Dim: Costruiamo

$$T_k : C_k(X) \longrightarrow C_{k+1}(X)$$

$$T\partial \pm \partial T = \lambda 1_{C_k}(X) \qquad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Nota caso speciale di prima $\quad X = Y \quad f = \lambda$ id., $g =$ cost.

$$[c] = \lambda^{-1}[T\partial c \pm \partial T c] = \lambda^{-1}[\partial T c] = 0.$$

[illegible] $T(\sigma)$ $\quad \sigma : \Delta_k \longrightarrow X$

$$T(\sigma) : \Delta_{k+1} \longrightarrow X$$

Fissiamo $P \in X$

$$T(\sigma)(x_1 \dots x_k, x_{k+1}) = \left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right) \sigma\left(\frac{x_2}{\sum_i x_i}, \dots \frac{x_{k+1}}{\sum x_i}\right) + \left(1 - \sum_i x_i\right)$$

se $(x_1 \dots x_{k+1}) \neq (0 \dots\dots 0)$

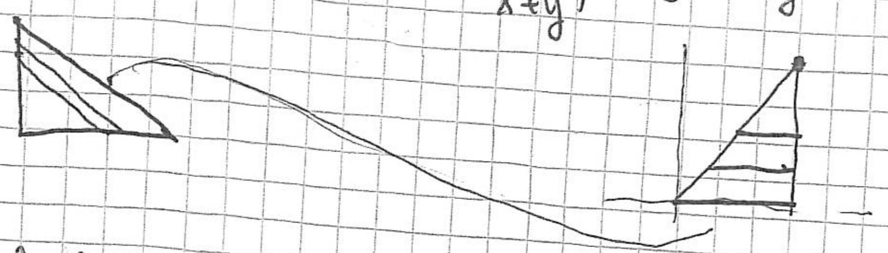
P se $(x_1 \dots x_{k+1}) = (0 \dots 0)$

Esempio $X = \mathbb{R}^2$

$$\sigma : \Delta_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad P = (1, 1)$$
$$x \longmapsto (x, 0)$$

$$T(\sigma)(x, y) = (x+y)\, \sigma\left(\frac{y}{x+y}\right) + (1 - x - y) P.$$

Δ_2



$\mathbb{R}^2$

<u>Verifiche</u>

$$T\partial\sigma = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s T(\sigma j_s)$$

$s > 0$

s-mo posto

$$T(\sigma j_s)(x_1 \dots x_k) = \left(\sum_{i=1}^{k} x_k\right) \sigma\left(\frac{x_2}{\sum_i x_i}, \dots 0, \frac{x_k}{\sum_i x_i}\right) +$$
$$\left(1 - \sum_i x_i\right) P.$$

Per $s=0$

$$T(s j_0)(x_1 \dots x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, \sigma\left(\frac{x_1}{\sum_i x_i} \dots \frac{x_k}{\sum_i x_i}\right) + \left(1-\sum_i x_i\right) P$$

$$\partial T\sigma = \sum_{s=0}^{k+1} (-1)^s (T\sigma)_{j_s}.$$

$s>1$ $\quad (T\sigma)_{j_s}(x_1 \dots x_k) = \left(\sum_i x_i\right) \sigma\left(\frac{x_1}{\sum_i x_i}, \dots, 0 \quad \frac{x_k}{\sum_i x_i}\right) +$

$s-1$ posto

$$\left(1-\sum_i x_i\right) P.$$

$s=1$

$$(T\sigma)_{j_1}(x_1 \dots x_k) = T\sigma(0, x_1 \dots x_k) =$$

$$\left(\sum_i x_i\right) \sigma\left(\frac{x_1}{\sum_i x_i}, \dots \frac{x_k}{\sum_i x_i}\right) + \left(1-\sum_i x_i\right) P.$$

$s=0$ $\quad (T\sigma)_{j_0}(x_1 \dots x_k) = T\sigma\left(1-\sum_i x_i, x_1 \dots x_k\right)$

Quindi $T_{k-1}\partial_k + \partial_{k+1} T_k = 1_{C_k(X)}$

Dimostrazione del teorema di invarianza omotopica

$F : X \times \underline{I} \longrightarrow Y$. omotopia tra f e g.

$i_{X,0}, i_{X,1} : X \longrightarrow X \times \underline{I}$

$$i_{X,0}(x) = (x,0) \qquad i_{X,1}(x) = (x,1)$$

Basta far vedere che $(i_{X,0})_* = (i_{X,1})_*$

Quindi vogliamo

$$J_X : C_k(X) \longrightarrow C_{k+1}(X \times I)$$

t.c. $$J_X \partial + \partial J_X = (i_{X,0})_* - (i_{X,1})_* .$$

ma anche

$$\begin{tikzcd}
C_k(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "J_X"] & C_k(Y) \arrow[d, "J_Y"] \\
C_{k+1}(X \times I) \arrow[r, "(f \times 1)_*"] & C_{k+1}(Y \times I)
\end{tikzcd}$$

<u>commute</u>

Costruzione simultanea.

$$J_X : C_0(X) \longrightarrow C_1(X \times I)$$

P uno zero simplesso $\quad J_X(P)(t) = (P,t)$.

Verifica $\quad \partial J_X(P) = (P,0) - (P,1) \quad$ ✓.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & f(P) \arrow[d] \\
(P,t) \arrow[r] & (f(p),t)
\end{tikzcd}$$

#.

Per induzione supponiamo di avere J_X per le n-catene $h \leq k-1$. Vogliamo costruirlo per le k-catene.

Caso particolare, ma non troppo

$$X = \Delta_k \quad e \quad \sigma = 1_k : \Delta_k \to \Delta_k .$$

$J_{\Delta_k}(1)$ per induzione abbiamo $J_{\Delta_k}(\partial 1)$

e inoltre

$$\partial J_{\Delta_k}(\partial 1) + J_{\Delta_k}(\partial^2 1) = (i_{\Delta_k,0})_*(\partial 1) - (i_{\Delta_k,1})_*(\partial 1)$$

$$\partial J_{\Delta_k}(\partial 1) - \partial (i_{\Delta_k,0})_*(1) + \partial (i_{\Delta_k,1})_*(1) = 0$$

Quindi $J_{\Delta_k}(\partial 1) - (i_{\Delta_k,0})_*(1) + (i_{\Delta_k,1})_*(1)$

$$\in Z_k(\underbrace{\Delta_k \times I}_{\text{convesso}})$$

Essendo convesso, è anche un bordo.

$\exists\, \gamma \in C_{k+1}(\Delta_k \times I)$ t.c.

$$\partial \gamma = \text{-----}$$

$$J_{\Delta_k}(1) = -\gamma .$$

$$J_{\Delta}(1) + J_{\Delta_k}(\partial 1) = (i_{\Delta_{k,0}})_*(1) - (i_{\Delta_{k,1}})_*(1)$$

Quindi $X = \Delta_k$, $\sigma = id.$ $0, K$.

Osservazione $\sigma : \Delta_k \longrightarrow X$ simplesso

$$\sigma = \sigma_*(1) \in C_k(X)$$

$$J_X(\sigma) = J_X(\sigma_*(1)) = (\sigma \times 1)_* J_{\Delta_k}(1)$$

si estende a $C_k(X)$

Dobbiamo verificare le proprietà

$$J_Y f_*(\sigma) = J_Y f_* \sigma_*(1) = J_Y (f \circ \sigma)_*(1) =$$

$$(f \circ \sigma \times 1)_* J_{\Delta_k}(1) = (f \times 1)_* \circ (\sigma \times 1)_* J_{\Delta_k}(1)$$

$$= (f \times 1)_* J_X(\sigma)$$

$$\partial J_X(\sigma) + J_X \partial \sigma = \partial (\sigma \times 1)_* J_{\Delta_k}(1) +$$

$$J_X \partial \sigma_*(1) = (\sigma \times 1)_* \partial J_{\Delta_k}(1) + J_X \sigma_*(\partial 1)$$

$$(\sigma \times 1)_* \partial J_{\Delta_k}(1) + (\sigma \times 1)_* J_{\Delta_k}(\partial 1)$$ per induzione e commutatività

$$= (\sigma \times 1)_* \left[(i_{\Delta_{X,0}})(1) - (i_{\Delta_{X,1}})_*(1) \right) = (i_{X,0})_*(\sigma) - (i_{X,1})_*(\sigma)$$

Complessi di moduli   Lezione 5.

$$A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_{n-2} \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \dots A_1 \to A$$

successione di R moduli

si dice esatta se $\ker(\alpha_i) = \operatorname{Im} \alpha_{i+1}$

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

esatta corta.

$\iff$ α iniettiva β suriettiva e $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$

Se i moduli sono liberi e di rango finito

$$A \cong R^k.$$

$$0 \to A_n \to A_{n-1} \to \qquad A_1 \to A_0 \to 0$$

esatta allora $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{rg}(A_i) = 0.$

esatta corta $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(C)$.

Lemma (dei 5)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "c"] & D \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d"] & E \arrow[d, "e"] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C' \arrow[r, "\gamma'"] & D \arrow[r, "\delta'"] & E'
\end{tikzcd}$$

tutto commuta

omomorfismi di R moduli

righe orizzontali sono esatte.

a, b, d, e isomorfismi $\Longrightarrow$ c è un isomorfismo.

Dim 1) c è iniettivo.

Sia $c(x)=0 \Rightarrow d\gamma(x) = \gamma' c(x) = 0$

Quindi $\gamma(x)=0$ (d isomorfismo).

Per l'esattezza esiste $y \in B$ / $\beta(y)=x$.

Inoltre $\beta' b(y) = c(x) = 0$ quindi $b(y) = \alpha'(z)$

Adesso $\alpha a^{-1}(z) = y$ e $x = \beta(y) = \beta\alpha(a^{-1}z) = 0$.

2) c è suriettivo

$t \in C'$ $\quad w = d^{-1}\gamma'(t)$ $\quad \delta(w) = ?$

e $\delta(w)=0 \Rightarrow \delta(w) = 0 \Rightarrow w = \gamma(x)$

Inoltre $\gamma' c(x) = \gamma'(t) \Rightarrow c(x) - t = \beta'(u)$

$c(x - \beta b^{-1}(u)) = t$.

Un complesso $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ di R-moduli è una successione

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \quad \cdots \quad C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

tali che $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

I complessi formano una categoria

I morfismi $\alpha_* : C_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ sono diagrammi commutativi del tipo

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\alpha_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"'] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-2}"] & \cdots \\
{} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"] & C'_{n-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dato un complesso $C_\bullet$ definiamo l'omologia k-ma

$$H_k(C_*) = \frac{\operatorname{Ker} \partial_k}{\operatorname{Im}(\partial_{k+1})} \qquad k \geq 0$$

L'omologia è una misura della non esattezza di un complesso

Dato $\alpha_* \; C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$

tale che $\alpha_k(\operatorname{Ker} \partial_k) \subseteq \operatorname{Ker} \partial'_k$

$$\alpha_k(\operatorname{Im} \partial_{k+1}) \subseteq \operatorname{Im} \partial'_{k+1}$$

permette di definire

$$\alpha_* : H_k(C_*) \longrightarrow H_k(C'_*)$$

Abbiamo un funtore tra la categoria dei complessi di R Moduli e la categoria degli R moduli

Ultimamente $1_* : C_* \longrightarrow C_*$ è l'identità

$\Rightarrow 1_*$ è l'identità in omologia

α $\quad \alpha_* : C_* \longrightarrow C'_*$ $\qquad \beta_* : C'_* \longrightarrow C''_*$

$\Rightarrow (\beta\alpha)_* = \beta_* \alpha_*$.

Risultato fondamentale

<u>Teorema</u> (Successione esatta lunga in omologia)

Sia

$$0 \longrightarrow C''_* \xrightarrow{\alpha_*} C_* \xrightarrow{\beta_*} C'_* \longrightarrow 0$$ esatta corta. Allora c'è una successione esatta lunga in omologia di R moduli:

$$H_k(C''_*) \xrightarrow{\alpha_*} H_k(C_*) \xrightarrow{\beta_*} H_k(C'_*) \xrightarrow{\delta_*} H_{k-1}(C''_*) \rightarrow \dots$$

<u>Dim</u> Abbiamo un diagramma commutativo così fatto:

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C''_{k+1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial''"] & C_{k+1} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\partial"] & C'_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C''_{k} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial''"] & C_{k} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\partial"] & C'_{k} \arrow[r] \arrow[d, "\partial'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C''_{k-1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial''"] & C_{k-1} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\partial"] & C'_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C''_{k-2} \arrow[r, "\alpha"] & C_{k-2} \arrow[r, "\beta"] & C'_{k-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

esattezza orizzontale

Da definire $\delta_* : H_k(C') \longrightarrow H_{k-1}(C'')$

Basta definire $\overline{\delta_*} : \mathrm{Ker}(\partial'_k) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\partial''_{k-1}) \big/ \mathrm{Im}\,\partial''_k$

che si annulli su $\mathrm{Im}(\partial'_{k+1})$. e poi quozientare.

$x \in \mathrm{Ker}(\partial'_k)$ β suriettiva $\Rightarrow \exists\, y \in C_k$ $\beta(y) = x$.

$\beta\partial(y) = \partial'(x) = 0$

Quindi esiste $u \in C''_{k-1}$ t.c. $\alpha(u) = \partial y$.

Inoltre $\alpha\partial''(u) = \partial\alpha(u) = 0$. α iniettiva $\Rightarrow \partial'' u = 0$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C''_k & \xrightarrow{\alpha} & C_k & \xrightarrow{\beta} & C'_k & \longrightarrow & 0 \\
 & & t & & y & \longmapsto & x & & \\
 & & & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial' & & \\
0 & \longrightarrow & C''_{k-1} & \xrightarrow{\alpha} & C_{k-1} & \longrightarrow & C'_{k-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \partial y & \overset{\beta}{\longmapsto} & 0 & & \\
 & & u & \longmapsto & \partial y & & & & \\
 & & \downarrow \partial'' & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & 0 & & & &
\end{array}
$$

Allora $\bar{\delta}(x) = [u]$

Ben posto perché l'unica ambiguità è nella scelta di y. Invece di y possiamo prendere $(y+\alpha(t)) \longrightarrow x$

Adesso $\partial(y+\alpha(t)) = \partial y + \partial\alpha(t) = \partial y + \alpha\,\partial''(t)$

quindi ~~uez~~ $u+\partial''(t)$ invece di u e quindi $[u]$ non cambia.

Adesso $\bar{\delta}$ su $\operatorname{Im} \partial'_{k+1}$ $\quad x = \partial v \Rightarrow y = \partial z$

$z \in C_{k+1}$ $\quad \beta(z) = v \Rightarrow \alpha(u) = \partial^2 z = 0 \quad \Rightarrow \underline{u = 0}$

Esattezza in $H_k(C_*)$

$$H_k(C''_*) \xrightarrow{\alpha_*} H_k(C_*) \xrightarrow{\beta_*} H_k(C'_*)$$

$\beta_*[x] = 0 \iff \beta(x) = \partial'(y) \quad y \in C'_{k+1}$

quindi preso $z \in C_{k+1}$ $\beta(z) = y$

$\beta(\partial z - x) = 0$ ovvero $\partial z - x = \alpha(v)$

con $\partial'' v = 0 \Rightarrow \alpha_*[v] = [x]$.

Altre esattezze in modo simile.