Geometria 3 giugno 2014

Es 1. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e sia $U = Span\ \{v_1, v_2\}$.

Es 1.1. Il vettore v_3 appartiene ad U ? Se sí o no, perche'?

Es 1.2. Il vettore v_4 appartiene ad U ? Se sí o no, perche'?

Es 1.3. Sia $V = Span\ \{v_1, v_2, v_3\}$. Trovare equazioni cartesiane di $W = V^{\perp}$.

Es 1.4. Trovare una base ortonormale di W.

Soluzione v_3 non appartiene ad U ? percheúsando il metodo di Gauss si vede che i 3 vettori sono linearmente indipendenti. Il vettore v_4 appartiene ad U ? , perche' il vettore nullo appartiene atutti i sottospazi. Le equazioni cartesiane di $W = V^{\perp}$ si ottengono ponendo

$$< v_1, w >=< v_2, w >=< v_3, w >= 0$$

Da ciò si ottengono 3 equazioni

$$2x + 3z + u = 0, \quad y + z = 0, \quad u = 0$$

Le solluzioni sono della forma

$$x = 3t, \quad z = -2t, \quad y = 2t, \quad u = 0$$

quindi $w = \frac{1}{sqrt17}(3, -2, 2, 0)$ è una base ortonormale.

Es 2. $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineare.

Es 2.1. Si puó dire che f é iniettiva? Si puo' dire che f non é iniettiva?

Es 2.2. Si puó dire che f é sicuramente suriettiva? Se no, esibire un controesempio.

Soluzione Si puo' dire che f non é iniettiva infatti dalla formula di Grassmann otteniamo che $\dim Kerf \geq 2$
Non si puó dire che f é sicuramente suriettiva, considerate $f = 0$

Es 3. Sia f la funzione associata alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Es 3.1. Trovare $f(e_1)$ ed $f(e_2)$.
Si puó dire che e_1 ed e_2 sono autovettori per f?
Se sí, quali sono gli autovalori corrispondenti?

Es 3.2. Dire se f é diagonalizzabile o no.

Soluzione $f(e_1) = e_1$ ed $f(e_2) = 4e_2$, quindi sono autovettori con autovalori 1 e 4.
Il polinomio caratteristico è $(t-1)(t-4)(t-2)$, quindi f diagonalizza

Es 4. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es 4.1. Verificare che

$$AB \neq BA \qquad \text{ma} \qquad \det AB = \det BA$$

Es 4.2. Motivare i risultati ottenuti

Soluzione la prima parte è un conto. $\det AB = \det BA$ è conseguenza del teorema di Binet.