Geometria 1 a.a. 2011/12
Scritto del 7-02-2012
Compito A

(1) Sia $V = \mathbb{R}^2[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ e sia $\langle\, , \,\rangle$ la forma bilineare simmetrica $V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle p(t), q(t)\rangle = p(0)q(0) - p'(0)q''(0) - q'(0)p''(0) + p''(0)q(0) + p(0)q''(0)\,,$$

dove $p'(t)$ e $p''(t)$ indicano la derivata prima e la derivata seconda di $p(t)$, rispettivamente.

(a) Stabilire se $\langle\, , \,\rangle$ sia non degenere;
(b) Determinare la segnatura di $\langle\, , \,\rangle$.

(2) Sia $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'endomorfismo rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^3$.

(a) Determinare la forma di Jordan di φ.
(b) Determinare una base di Jordan di φ.

(3) Al variare di $k \in \mathbb{C}$, si consideri l'endomorfismo $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ 1+i+k & 1+i \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^2$, dove i è l'unità immaginaria.

(a) Determinare i valori *reali* di k per i quali φ è un endomorfismo normale (rispetto al prodotto Hermitiano standard di $\mathbb{C}^2$).
(b) Determinare i valori *complessi* di k per i quali φ ammette una base ortonormale di autovettori (rispetto al prodotto Hermitiano standard di $\mathbb{C}^2$).

(4) (a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da $f(x) = x^2$ Verificare che f non è aperta
(b) Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'applicazione data da $f(z) = z^2$ Verificare che f è aperta

(5) Assegnati i punti

$$P_0 = [1, 1],\ P_1 = [1, 2],\ P_2 = [1, 0]$$

di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

(a) determinare la proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che manda P_1, P_2, P_3 nel riferimento standard di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$;
(b) dati i punti

$$Q_0 = [1, 0],\ Q_1[1, -1],\ Q_2 = [1, 1]$$

determinare la proiettività $g : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che manda P_i in Q_i, per $i = 0, 1, 2$.

(6) Sia X uno spazio topologico con un numero finito di elementi. Verificare che X è di Hausdorff se e solo se X ha la topologia discreta.