Esercizi del corso di Geometria - Foglio 7

15 Dicembre 2013

Esercizio 1. In $\mathbb{R}[e^x, e^{-x}, 1]$ si consideri il prodotto scalare

$$< f(x), g(x) >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Trovare una base ortonormale

oppure In $\mathbb{R}[senx, cosx, 1]$ si consideri il prodotto scalare

$$< f(x), g(x) >= \int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx$$

Trovare una base ortonormale

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 e $< p(t), q(t) >$ il prodotto scalare definito da

$$p(0)q(0) + p(1)q(1) - p(-1)q(-1)\,.$$

Verificare che il prodotto scalare è non degenere

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia $S = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Verificare che l'applicazione $< , >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $< X, Y >= X^T SY$ è un prodotto scalare definito positivo.

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore L_A con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Stabilire se T è simmetrico rispetto al prodotto scalare precedentemente definito .

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ ortonormalizzare i seguenti vettori

$$v_1 = (1, 0, 1, -1)^T,\ v_2 = (0, 1, -1, 0)^T,\ v_3 = (1, 0, 0, 0)$$

Completare a una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 e $< p(t), q(t) >$ il prodotto scalare definito da

$$p(0)q(0) - p(2)q(2)\,.$$

Verificare se il prodotto scalare è non degenere