Esercizi del corso di Geometria - Foglio 6

30 Novembre ottobre 2013

Esercizio 1.
Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$f(x,y) = (3x-2y, x+3y).$$

Calcolare la matrice di f nella base $\{(2,1),(1,3)\}$.

Esercizio 2. Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,2,3) \\ v_2 &= (1,2,0) \\ v_3 &= (2,1,1) \\ v &= (-1,2,-1). \end{aligned}$$

Calcolare le coordinate dei vettori della base standard e di v rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Esercizio 3. Siano v_1, v_2 e v_3 come nell'esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'applicazione la cui matrice nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ ï¿½

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la matrice di f nella base standard.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$ e sia $f\colon V \mapsto V$ l'applicazione lineare data da

$$f(p(x)) = \frac{p(x)-p(0)}{x} + p(x).$$

Verificare che f ï¿½ lineare e calcolare la matrice di f nella base $\{2, 2+x, x-x^2\}$.

Esercizio 5. Vediamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Dato $z = a+ib \in \mathbb{C}$ sia $L_z\colon \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ l'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per z. Mostrare che la matrice di L_z nella base $\{1, i\}$ ï¿½

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Siano v_1, v_2 e v_3 come nell'esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data, nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la dimensione di $\ker f$ e trovare una base del nucleo.

Esercizio 7. *Per chi ha visto un po' di derivate.*

(1) Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e sia $D\colon V \mapsto V$ la derivata. Mostrare che D ï¿½ un'applicazione lineare e calcolarne la matrice rispetto alla base $\{1, 1+x, 1+x^2, x^2+x^3\}$.

(2) Sia W lo spazio vettoriale generato dalle funzioni $\sin x$ e $\cos x$. Mostrare che la derivata dï¿½ luogo ad un'applicazione lineare $D\colon W \mapsto W$ e calcolarne la matrice rispetto alla base $\{\sin x, \sin x + \cos x\}$.

Esercizio 8. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e consideriamo l'applicazione lineare $f\colon V \mapsto V$ data da

$$f(p(x)) = \frac{p(x) - p(0)}{x} + p(x).$$

Scelta una base di V, trovare la matrice di f rispetto a questa base e calcolarne il determinante. Verificare una scelta diversa della base dà lo stesso risultato.

Esercizio 10. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Verificate che $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, ma $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Esercizio 11. Dati $n+1$ numeri $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ consideriamo la matrice di Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_0^n & \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

Dimostrare per induzione che il determinante di V ï¿½ pari al prodotto di tutte le differenze tra gli α_i, ovvero

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j).$$

In particolare il determinante si annulla se e solo se due degli α_i coincidono.

(Sugg: iniziate sottraendo ad ogni riga la precedente moltiplicata per α_0.)