Esercizi del corso di Geometria - Foglio5

29 ottobre 2015

Esercizio 1. (1) Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calcolare i prodotti AB e BA.

(2) Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare il prodotto AB e dedurne che per matrici non vale la legge di annullamento del prodotto.

(3) Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare A^3 e dedurne che non vale la proprietà che le potenze di un elemento non nullo sono non nulle (questo è più forte dell'enunciato precedente).

Esercizio 2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare l'inversa di A, cioè una matrice $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $AB = BA = \mathrm{Id}$.

(Suggerimento: se scrivete esplicitamente la condizione $AB = \mathrm{Id}$ trovate un sistema lineare nei coefficienti di B).

Esercizio 3. Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari.

(1) La funzione

$$f\colon \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}$$

data da $f(x, y, z) = 3x - 2y + z$.

(2) La funzione

$$f\colon \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}$$

data da $f(x, y, z) = 3x - 2y + 1$.

(3) Sia X l'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. La funzione

$$f\colon X \mapsto \mathbb{R}$$

data da $f(\phi) = \phi(1)$.

(4) La funzione

$$f\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

data da $f(x, y) = (e^y, e^x)$.

Esercizio 4. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ una matrice a coefficienti in $\mathbb{K}$. Definiamo la trasposta di A, indicata con A^T tramite

$$A^T_{ij} = A_{ji}.$$

In altre parole A^T si ottiene da A riflettendo rispetto alla diagonale principale.

Dimostrare che se A è a coefficienti reali e $A^T \cdot A = \underline{0}$, allora $A = \underline{0}$ (fate prima il caso 2×2).

Esercizio 5. Siano V e W i sottospazi di $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ formati dai polinomi che si annullano nel punto 1 e 3 rispettivamente. Trovare un isomorfismo da V a W.

Esercizio 6. Consideriamo le matrici

$$\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificare che $J^2 = -\mathrm{Id}$. Consideriamo il sottospazio C di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ generato da Id e da J, cioè

$$C = \{a\mathrm{Id} + bJ \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Verificare che C è un campo. Sapete riconoscere di che campo si tratta?

Esercizio 7. (1) Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$f(t, x, y, z) = (2x - 3y, t + x + y + z).$$

Calcolare le dimensioni di $kerf$ e Imf.

(2) Sia $g\colon \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ l'applicazione data $g(z) = z + \bar{z}$. Dimostrare che g non è lineare se vediamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, ma lo è se vediamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. In questo secondo caso determinare $kerg$ e Img.

Esercizio 8. Sia

$$f\colon \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mapsto \mathbb{R}[x]_{\leq d+1}$$

l'applicazione data da $f(p(x)) = xp(x)$, e sia

$$g\colon \mathbb{R}[x]_{\leq d+1} \mapsto \mathbb{R}$$

l'applicazione data da $g(q(x)) = q(0)$. Dimostrare che f e g sono lineari e che $kerg = Imf$.

Esercizio 9. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia $V \subset M_{2,2}(\mathbb{C})$ il sottoinsieme formato dalle matrici che commutano con A, ovvero

$$V = \{B \in M_{2,2}(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}.$$

Dimostrare che V è un sottospazio, e determinarlo esplicitamente, in particolare calcolarne la dimensione.