Esercizi del corso di Geometria - Foglio 4

3 Novembre 2013

Esercizio 1. Consideriamo i seguenti insiemi di vettori in $\mathbb{R}^n$; utilizzare il metodo di Gauss per estrarre una base del sottospazio da essi generato. In particolare calcolarne la dimensione.

$$\{(1,1,0,1),\ (-1,0,0,1),\ (0,1,0,2)\}$$
$$\{(1,1,0,2),\ (1,0,1,0),\ (0,1,3,1),\ (2,0,-2,1)\}$$
$$\{(1,2,3,4,5),\ (0,0,1,0,1),\ (1,2,0,4,2),\ (-1,1,-2,1,0),\ (0,3,-2,5,2)\}.$$

Esercizio 2. Utilizzare il metodo di Gauss per risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2c-d & = 1 \\ a+b+c & = 2 \\ a-2d+e & = -1 \\ c+d+3e & = 0 \\ a+b+c+d+e & = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $(3,1,1,-1)$ e $(0,0,1,1)$. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio formato dai vettori $w = (a,b,c,d)$ che soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} a-b+d & = 0 \\ 2b+c+d & = 0. \end{cases}$$

Determinare i sottospazi $V \cap W$ e $V + W$ dandone una base *oppure* tramite equazioni. In particolare dire qual è la loro dimensione.

Esercizio 4. Siano dati i vettori

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,1,2) \\ v_2 &= (1+i, i, -1, 2-2i) \\ w_1 &= (-i, 1+i, -1, 0) \\ w_2 &= (i, -i, -1, 3i) \end{aligned}$$

in $\mathbb{C}^4$. Siano $V = Span(v_1, v_2)$ e $W = Span(w_1, w_2)$. Determinare chi è $V \cap W$. Dedurne che v_1, v_2, w_1 e w_2 generano tutto $\mathbb{C}^4$.

Esercizio 5. Sia $M_n(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate reali di ordine n. Siano $S_n(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici simmetriche e U_n il sottospazio definito da

$$U_n\{A \in M_n(\mathbb{R}) / a_{i,j} = 0 \ sei \geq j.\}$$

Verificare se

$$M_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus U_n$$

Inoltre , se volete Esercizi 6.2, 6.6, 6.8, 6.10 del testo