Geometria . a.a. 13/14.

Esercizi del 27/10/2013

Esercizio 1. Verificare che i seguenti insiemi di vettori in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti. Completarli ad una base dello spazio.

$$\{(1,1,0),\, (1,0,1)\}$$
$$\{(2,0,-1),\, (1,1,3)\}$$
$$\{(1,1,0,2),\, (1,0,1,0),\, (0,1,3,1)\}.$$

Esercizio 2. Indichiamo con $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ di grado al più d. Verificare che x, $x+1$ e x^2+1 sono linearmente indipendenti in $\mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ e completarli ad una base.

Esercizio 3. Consideriamo $\mathbb{C}^2$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Dimostrare che $(1, 3i+1)$ e $(i, -3+i)$ sono linearmente indipendenti. Completarli ad una base di $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $(1,0,0,1)$ e $(-1,0,1,2)$. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio formato dai vettori $w = (a,b,c,d)$ che soddisfano le equazioni

$$3c - d = 0, \quad a + 2b = 0.$$

Determinare i sottospazi $V \cap W$ e $V + W$ dandone una base *oppure* tramite equazioni. In particolare dire qual è la loro dimensione.

Esercizio 5. Siano $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ numeri distinti. Dimostrare, tramite i passi seguenti, che i vettori

$$\begin{aligned} v_0 &= (1, a_0, a_0^2, \ldots, a_0^n) \\ v_1 &= (1, a_1, a_1^2, \ldots, a_1^n) \\ \vdots &= \qquad \vdots \\ v_n &= (1, a_n, a_n^2, \ldots, a_n^n) \end{aligned}$$

sono una base di $\mathbb{R}^{n+1}$.

(1) Dimostrare che è sufficiente far vedere che sono linearmente indipendenti.
(2) Mostrate la tesi per $n = 1, 2$, usando l'eliminazione di Gauss.
(3) Provate a generalizzare il procedimento per n qualsiasi.

Esercizio 6. Siano U, W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ verificare che il prodotto cartesiano $U \times W$ ha una struttura di spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$.Siano U, W sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V, consideriamol'applicazione lineare

$$T : U \times W \to U + W$$

data da $T((u, w) = u + w$. Verificare che la formula

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$$

è conseguenza del Teorema della dimensione