Geometria

Esercizi su dipendenza e indipendenza lineare

Esercizio 1. Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^n$ con l'usuale operazione di somma. Diamo la seguente operazione di prodotto per uno scalare:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda^2 x_1, \ldots, \lambda^2 x_n).$$

Verificare che con questa operazione $\mathbb{R}^n$ non è uno spazio vettoriale. Quale delle proprietà che definiscono uno spazio vettoriale non vale?

Esercizio 2. Dire se i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti, e se sono una base:

$$\{(1,0,1),(2,0,1),(0,-1,1)\}$$
$$\{(1,0,1),(2,0,1),(0,0,1)\}$$
$$\{(1,1,1),(-1,0,1)\}$$
$$\{(1,0,1),(0,0,1),(0,-1,2),(1,2,3)\}$$

Esercizio 3. Mostrare che il sottoinsieme formato dai polinomi in $\mathbb{R}_3[t]$ che si annullano nel punto 1 è anch'esso uno spazio vettoriale. Sapreste trovarne una base?

Sol:$\{t-1,\ (t-1)^2,\ (t-1)^3\}$

Esercizio 4. Sia V l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; mostrare che V è uno spazio vettoriale.

Esercizio 5. Siano $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ per $i = 1, 2, 3$ tre vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che i vettori di $\mathbb{C}^3$ che hanno le stesse coordinate sono ancora linearmente indipendenti (su $\mathbb{C}$).

Sol: Scrivi la dipendenza lineare su $\mathbb{C}$. Vedi che implica quella su $\mathbb{R}$

Esercizio 6. Dire se i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti, e se sono una base:

$$\{(1,1),(0,3)\}$$
$$\{(0,1),(2,1),(1,2)\}$$
$$\{(4,2),(6,3)\}$$

Esercizio 7. Dire se i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti, e se sono una base:

$$\{(-1,2,1),(2,3,4),(1,0,0)\}$$
$$\{(5,1,2),(2,1,-1),(4,-1,5)\}$$
$$\{(2,1,0),(3,4,1)\}$$
$$\{(2,2,1),(1,0,-3),(1,0,3),(2,1,-1)\}$$