Geometria. a.a. 2013-14,

Esercizio 1. Trovare una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$\begin{cases} v_1 = (0,1,1,), \\ v_2 = (2,-1,2,) \\ v_3 = (-2,3,0) \end{cases}$$

Soluzione 1. Il terzo vettore è combinazione lineare dei primi 2. Basta ortogonalizzare v_1, v_2

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = (2,-3/2,3/2,) \quad \text{quindi}\, u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,),\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{34}}(4,-3,-3)$$

Esercizio 2. Verificare se la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -12 & 9 \end{vmatrix};$$

é diagonalizzabile

Soluzione 2. Polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t-1)^2(t-3)$. Basta vedere autospazio dell' autovalore $\lambda = 1$

$$\mathrm{rk}(A - 1_3) = \mathrm{rk}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & -12 & 8 \end{vmatrix} = 1$$

Quindi dimensione autospazio $3 - 1 = 2$ Molteplicità algebrica=Molteplicità geometrica, diagonalizza.

Esercizio 3. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' applicazione lineare data da

$$T\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} x+2y-z \\ -2x+4y-3z \\ -2x+4y-2z \end{vmatrix}$$

Verificare che T è invertibile. Determinare l ' applicazione T^{-1}.

Soluzione 3. Il determinante della matrice associata è diverso da 0.

L' inversa è un conto

Esercizio 4. Spiegare perché la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix};$$

è diagonalizzabile.

Calcolare una matrice ortonormale U che diagonalizza A

Soluzione 4. La matrice è simmetrica, quindi diagonalizza.

La matrice ortonormale U che diagonalizza A

si ottiene ortonormalizzando gli autovettori

$$A = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix};$$