Istituzioni Geometria superiore a.a. 17/18.
Esonero 11/01/18.

Esercizio 1. Si consideri la superficie di Riemann

$$T = \mathbb{C}/\Lambda$$

Dare generatori per $H^1_{dR}(T)$ e $H^2_{dR}(T)$.

Soluzione $dz, d\bar{z}$ base di $H^1_{dR}(T)$, $dz \wedge d\bar{z}$ base di $H^2_{dR}(T)$

Esercizio 2. Verificare che le superfici di Riemann compatte di genere 4 non possono essere rappresentate come curve proiettive piane non singolari.

Verificare che le superfici di Riemann compatte di genere 4 possono essere immerse negli spazi proiettivi $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ per $n \geq 5$.

Soluzione Se X è rappresentata come una curve proiettiva piana, di grado d abbiamo $4 = 1/2(d-1)(d-2)$ che è assurdo.
Ogni divisore D di grado $d \geq 9$ è molto ampio e per il teorema di Riemann Roch induce un' immersione in $\mathbb{P}^{d-4}(\mathbb{C})$.

Esercizio 3. Sia $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \hat{\mathbb{C}}$, $p_1 = [0,1] = 0$, $p_2 = [1,0] = \infty$.
Calcolare la dimensione di $I(-p_1 - 2p_2)$.

Scrivere esplicitamente una base di $I(-p_1 - 2p_2)$.

Soluzione Per il teorema di Riemann Roch abbiamo che $I(-p_1 - 2p_2) = 2$. Il differenziale dz ha un polo doppio in ∞, quindi $dz, dz/z$ sono una base

Esercizio 4. Sia X la superficie di Riemann compatta associata alla curva C di equazione

$$y^4 = x^3 - x^2.$$

1) Desingolarizzare la curva C.

2) Sia f la funzione meromorfa su X indotta da $\frac{y}{x}$. Trovare i punti di ramificazione di f e calcolare in genere di X

Soluzione Il completamento proiettivo della curva, $Y^4 - X^3Z + X^2Z^2 = 0$ ha un unico punto singolare $P = [0,0,1]$ Scoppiando due volte il punto si trovano 2 punti che tramite l ' applicazione analitica indotta da $\frac{y}{x}$ finiscono entrambi in ∞ invece i punti $[1,0,1], [1,0,0]$ vanno in 0. L' applicazione è di grado 2 e ramifica quando l' equazione $\alpha^4 - z + z^2$ ha radici multiple. Questo avviene per 4 valori di α quindi ci sono 4 punti di ramificazione e usando la formula di Hurwitz abbiamo che $2g - 2 = -4 + 4$, $g = 1$

Esercizio 5. Sia C la superficie di Riemann della curva algebrica piana

$$C_0 = \{(x,y)/x^5 + y^5 - 1 = 0\}.$$

Calcolare il genere di C.

Sia $Q = [0,1,1], \in C$, Verificare che $10Q$ è un divisore canonico.

Sia $P = [1,0,1]$, calcolare $l(10(P-Q))$ e $l(5(P+Q))$

Soluzione Il completamento proiettivo della curva, $X^5 + Y^5 - Z^5 = 0$ è non singolare, quindi è una superficie di Riemann di genere 6. Sappiamo che le curve di grado 2 tagliano i divisori canonici. La tangente a Q ha equazione $Y - Z = 0$ e interseca la curva esattamente in $5Q$, quindi $(Y-Z)^2 = 0$ interseca la curva in $10Q$ che è un divisore canonico. Similmente la tangente a P ha equazione $X - Z = 0$ e interseca la curva esattamente in $5P$, quindi $(X - Z)^2 = 0$ interseca la curva in $10P$ che è un divisore canonico. Quindi $l(10(P - Q)) = 1$ Adesso anche $5(P + Q)$ è un divisore canonico, tagliato da $(Y - Z)(X - Z) = 0$, quindi $l(5(P + Q)) = 6$.

Esercizio 6. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, sia C la s a curva proiettiva di equazione

$$X^4 + YZ^3 + ZY^3 = 0$$

e sia r la retta proiettiva di equazione $X = 0$.

Calcolare $H_k(C \cup r, \mathbb{R})$ e $H_k(C \setminus \{C \cap r\}, \mathbb{R})$.

Soluzione C è una superficie di Riemann di genere 3. $C \cap r$ sono 4 punti, $C \setminus \{C \cap r\}$ è la superficie di Riemann meno 4 punti che è omotopicamente equivalente a un bouchet di 9 circonferenze , quindi $H_0(C \setminus \{C \cap r\}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $H_1(C \setminus \{C \cap r\}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^9$, $H_k(C \setminus \{C \cap r\}, \mathbb{R}) = 0$ per $k \geq 2$.

nel caso $C \cup r$ usando Mayer Vietoris si ottiene $H_0(C \cup r, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $H_1(C \cup r, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^9$, $H_2(C \cup r, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$, $H_k(C \cup r, \mathbb{R}) = 0$ per $k \geq 3$.