Algebra Lineare a.a. 2011/12
Esonero del 19/01/12
Compito A

(1) Sia
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
(a) Calcolare $\det A$
(b) Calcolare A^{-1}

Risposta: $\det A = 1 \;\; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Discutere, al variare del parametro λ, il sistema dato dalle seguenti equazioni
$$x + y + 3z = \lambda, \quad \lambda x + 2y + z = 2, \quad x + y - \lambda z = 0.$$

Risposta: Un'unica soluzione per $\lambda \neq 2, -3$, infinite soluzioni per $\lambda = 2$, nessuna soluzione per $\lambda = -3$.

(3) Sia
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Calcolare autovalori e autovettori della matrice assegnata

Risposta: il polinomio caratteristico $(t-1)(t-2-\sqrt{3})(t-2+\sqrt{3})$. Autovettori $(-1,0,1)$ e $(1, 1-\sqrt{3}, 1), (1, 1+\sqrt{3}, 1)$.

(4) Verificare che i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
formano una base di $\mathbb{Q}^3$.
Descrivere relativamente alla base duale canonica di $\mathbb{Q}^3$ la base duale v_1^*, v_2^*, v_3^*

Risposta: $v_1^* = \varphi_1\,, \quad v_2^* = -\varphi_1 - \varphi_2\,, \quad v_3^* = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3$

(5) Sia $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'endomorfismo rappresentato dalla matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^3$.
(a) Determinare polinomio caratteristico e polinomio minimo di φ
(b) Determinare se φ è diagonalizzabile
Risposta: $p_\varphi(t) = q_\varphi(t) = t^2(t+1)$, φ non è diagonalizzabile.