Esercizi del corso di Geometria

17 Marzo 2014

Esercizio 1. Calcolare gli autovalori delle matrici seguenti, e trovare i relativi autospazi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. (difficile) In $\mathbb{R}^3$ sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard, e sia $f_k \colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ $(k \in \mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da

$$f_k(e_1) = -e_1, \qquad f_k(e_2) = e_2 + ke_3, \qquad f_k(e_3) = -k(e_1 - e_3).$$

Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ f_k è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e l'operatore $L_A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$. Studiare la diagonalizzabilità di L_A.

Esercizio 4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcolare autovalori e autovettori della matrice assegnata

Esercizio 5. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo definito da

$$\varphi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 2x + y \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice B che rappresenta φ rispetto alla base

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare gli autovalori di φ

Esercizio 6. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare det$A$
2. Calcolare A^{-1}

   Risposta: $\det A = 1$

   $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & 6 & -2 \\ -3 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

Esercizio 7. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 3 & -6 & 2 \\ 4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolare autovalori e autovettori della matrice assegnata.
Risposta: il polinomio caratteristico è $(t-1)^2(t+1)$. Autovettori $(1,1,2)$ e $(1,1,1)$.

Esercizio 8. Verificare che i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Applicare il processo di ortonormalizzazione

Esercizio 9. Sia

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

l'endomorfismo rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

1. Determinare polinomio caratteristico.
2. Determinare se φ è diagonalizzabile

   Risposta: $p_\varphi(t) = t^2(t+1)$, φ non è diagonalizzabile.