Geometria Analitica. a.a. 11/12.
Esercizi del 31/10/11

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{C}^3$ con prodotto hermitiano canonico. Sia $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'operatore L_A con

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1+i \\ -i & 1-i & 0 \end{vmatrix}$$

1.1 Spiegare perché T è diagonalizzabile.
1.2 Determinare una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ costituita da autovettori di T.
1.3 Determinare una matrice unitaria U ed una matrice diagonale Δ tali che $U^{-1}AU = \Delta$

Esercizio 2. Sia S una matrice definita positiva, verificare che **2.1** S^{-1} è definita positiva
2.2 esiste ed è unica una matrice simmetrica definita positiva R con $R^2 = S$
Nota: La matrice R viene indicata con la notazione $S^{1/2}$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia $S = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$
3.1 Verificare che l'applicazione $< \, , \, >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $< \underline{x}, \underline{y} >= \underline{y}^T S \underline{x}$ è un prodotto scalare definito positivo.
3.2 Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore L_A con $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$. Stabilire se T è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare definito in **3.1**.

Esercizio 4. Stabilire quali delle seguenti sono forme hermitiane su $\mathbb{C}^2$
4.1$< X, Y >= x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1}$.

4.2 $< X, Y >= x_1\overline{y_1} + 2ix_1\overline{y_2} - 2ix_2\overline{y_1}$.
4.3 $< X, Y >= i|x_1||y_1|$

Esercizio 5. Calcolare indice di nullità e di positività delle forme quadratiche associate alle seguenti matrici

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 e $< p(t), q(t) >$ il prodotto scalare definito da $p(0)q(0) + p(1)q(1) - p(-1)q(-1)$.
2.1 Verificare che il prodotto scalare è non degenere
2.2 Determinarne la segnatura.
Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 e $< p(t), q(t) >$ il prodotto scalare definito da $p(0)q(0) - p(2)q(2)$.
5.1 Verificare se il prodotto scalare è non degenere
5.2 Determinarne la segnatura.