# Forme differenziali su una superficie differenziabile orientabile.

**Def.** $S$ superficie differenziabile

$\gamma : [0,1] \longrightarrow S$ cammino chiuso regolare a tratti

se esiste una suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$

tale che

1) $\forall\, p = \gamma(t)$ $t \neq t_i$ esiste un disco parametrico $(U, \varphi)$ intorno a $p$ / $\varphi(U \cap \operatorname{Im}\gamma) = \{ z \in \Delta / \operatorname{Im} z = 0 \}$

$$= \{ (x,y) \in \Delta / y = 0 \}.$$

2) Se $p_j = \gamma(t_j)$ $\Rightarrow$ esiste un disco parametrico $(U_j, \varphi_j)$ intorno a $p_j$ $\varphi_j(U_j \cap \operatorname{Im}\gamma) =$ 

<u>Lemma</u> $S$ superficie diff orientabile

$\gamma : I \longrightarrow S$ cammino regolare a tratti

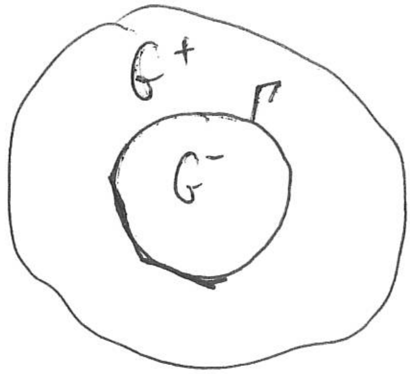
(2)

Allora esiste una regione $G$ è limitata connessa t.c.

1) $G \supset \Gamma = \operatorname{Im} \gamma$

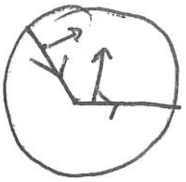
2) $G \setminus \Gamma = G^+ \cup G^-$ $\quad G^\pm$ connessi disgiunti

3) $\overline{G}$ compatto




<u>Dim</u> $\Gamma$ compatto possiamo ricoprirlo con # finito di carte locali come prima e possiamo assumere che 2 carte locali del tipo 2. siano disgiunte inoltre se $U \cap V \neq \emptyset$ $\Rightarrow U \cap V \cap \Gamma \neq \emptyset$ e $U \cap V \setminus \Gamma$ unione di 2 comp connesse

<u>In</u> ogni carta locale sia $z \in \varphi(\Gamma \cap U)$ allora eccetto che in al più un caso possiamo considerare un vettore normale che insieme al tg. formi una base orientata positivamente



Questi vettori (veramente ne basta 1) determinano una componente connessa $\Delta^+$ di $\Delta \setminus \varphi(\Gamma)$
chiamiamo $\Delta^-$ l'altra

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} U_i \qquad U_i^\pm = \varphi_i^{-1}(\Delta^\pm)$$

$$G^+ = \bigcup U_i^+ \qquad G^- = \bigcup U_i^-$$

$$G \supset \Gamma \qquad G \setminus \Gamma = G^+ \cup G^-$$

$G^+ \cap G^- = \phi$. Se non fosse così
Esistono $U, \varphi$ $V, \psi$ 2 carte tra le $\{U_i, \varphi_i\}$
$U^+ \cap V^- \neq \phi$ contraddizione perchè
$\psi\varphi^{-1}$ conserva l'orientazione e i vettori tg a $\varphi(\Gamma)$ vanno nei vettori tg a $\psi(\Gamma)$.

$\bar{G}$ è compatto e $G^+$, $G^-$ sono connessi

<u>Lemma</u> Sia $\gamma$ una curva regolare su $S$ superficie differenziabile orientata.
Allora esiste una 1-forma chiusa a supporto compatto $\omega_\gamma \in \mathcal{E}^1(S)$ t.c. $\forall \varphi$ chiusa in $\mathcal{E}^1(S)$

$$\int_S \omega_\gamma \wedge \varphi = \int_\gamma \varphi .$$

<u>Dim</u> Siano $A, B$ intorni di $\Gamma$ t.c.

$$\Gamma \subseteq A \subset \overline{A} \subset B \subseteq \overline{B} \subseteq G .$$

Poniamo $A^+ = A \cap G^+ \quad B^+ = B \cap G^+$

$$f \in \mathcal{E}^0(G^+) \qquad \begin{aligned} f &\equiv 1 \text{ in } A^+ \\ f &\equiv 0 \text{ in } G^+ \setminus B^+ \end{aligned}$$

$$\omega_\gamma = \begin{cases} df & \text{in } G^+ \\ 0 & \text{in } S \setminus G^+ \end{cases}$$

$\omega_\gamma$ è una 1-forma differenziale chiusa e a supporto compatto

Adesso

$$\int_S \omega_\gamma \wedge \varphi = \int_{G^+} \omega_\gamma \wedge \varphi = \int_{G^+} df \wedge \varphi = \int_{G^+} d(f\varphi) = \int_{\partial G} f\varphi =$$

$$\int_\gamma \varphi .$$

Da qui segue immediatamente un criterio di esattezza per le 1-forme

$S$ superficie orientabile $\varphi \in \mathcal{E}^1(S)$

$\varphi$ è esatta $\Leftrightarrow$ $\forall$ 1-forme chiuse a supporto compatto

$$\int_S \varphi \wedge \omega = 0$$

Dim $\varphi = df$ $\omega$ chiusa $\varphi \wedge \omega = d(f\omega)$

Sia $G$ una regione regolare t.c. $G \supset \operatorname{supp} \omega$.

$$\int_S df \wedge \omega = \int_G df \wedge \omega = \int_{\partial G} f\omega = 0 \text{ perché}$$

$\omega \equiv 0$ su $\partial G$

Viceversa $\forall \gamma$ cammino regolare

poiché $0 = \int \varphi \wedge \omega_\gamma = \int_\gamma \varphi$

Fissiamo $P_0 \in S$ $\quad f(P) = \int_{P_0}^{P} \varphi$.

$\varphi = df$ è esatta.

Si verifica anche $S$ orientabile non compatta $\Rightarrow H^2_{dR}(S) = 0$.

Adesso vogliamo considerare forme differenziali a supporto compatto e la coomologia a supporto compatto.

$$H^k_c(S) = Z^k_c(S) / B^k_c(S)$$

$Z^k_c = \{ \omega$ a supp compatto t.c. $d\omega = 0 \}$.

$B^k_c = \{ \omega \,/\, \omega = d\varphi \quad \varphi$ a supp compatto $\}$.

Definiamo

$$P_1 : H^1_c(S) \times H^1_{dR}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$([\omega], [\varphi]) \longmapsto \int_S \omega \wedge \varphi$$

Ben posta

$\omega = df$ $f$ a supporto compatto $\int_S df \wedge \varphi = \int_S d(f\varphi) = \int_G d(f\varphi)$

$= \int_{\partial G} f\varphi = 0$.

supp compatto

Se $\varphi = dg$ $\int_S \omega \wedge \varphi = -\int_S d(g\omega) = 0$

$$P : H^1_{dR}(S) \longrightarrow H^1_{comp}(S)^*$$
$$\varphi \dashrightarrow \int_S \cdot \wedge \varphi.$$

<u>Iniettiva</u> Assumiamo $\int_S \omega_\gamma \wedge \varphi = 0 \Rightarrow \varphi$ é esatta

Caso particolare

$S$ compatta

$$H^1_{dR}(S,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1_{dR}(S)^*$$

$$\omega \qquad \int \omega \wedge$$

$$H_1(S,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1_{dR}(S)^*$$

$$[\gamma] \longrightarrow \int_\gamma$$

$$P : H_1(S,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1_{dR}(S)$$

$$[\gamma] \longrightarrow P(\gamma)$$

$P(\gamma)$ è la forma differenziale t.c.

$$\int P(\gamma) \wedge \varphi = \int_\gamma \varphi \qquad P(\gamma) = \omega_\gamma .$$

La dualità di Poincaré consente di definire l'intersezione tra le classi in

$$H_1(S,\mathbb{R})$$

Infatti date $[\gamma]$ e $[\gamma']$ in $H_1(S,\mathbb{R})$

$$([\gamma],[\gamma']) = \int_S P(\gamma)\wedge P(\gamma') = \int_\gamma P(\gamma') = -\int_{\gamma'} P(\gamma)$$


$$H_1(S,\mathbb{R})$$

$$J = ([\gamma_i]\ [\gamma_j]) = \int_S \omega_{\gamma_i}\wedge\omega_{\gamma_j}.$$

Calcoliamo la matrice di intersezione

$$J = \left( [\gamma_i], [\gamma_j] \right)$$

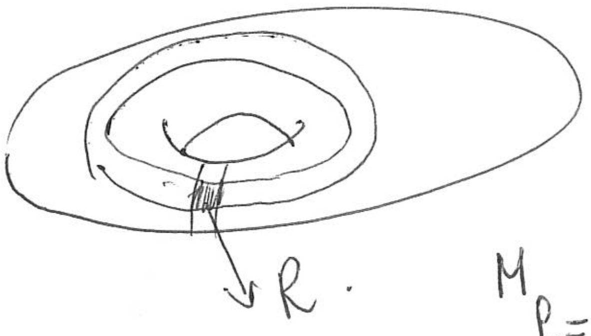
Ricordandoci come sono costruite le forme $\omega_i = \omega_{\gamma_i}$ abbiamo $Supp(\omega_i) \cap Supp(\omega_j) = \phi$

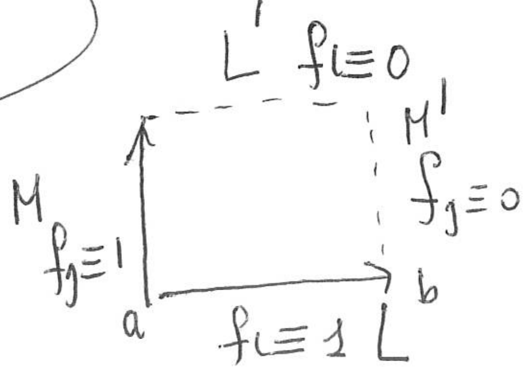
se $j \neq i, g+i$

Se $j = i$ o prendiamo $\gamma_i'$ omologo con ~~ω~~ supporto disgiunto oppure usando la formula precedente abbiamo $\int_\gamma \omega_\gamma = -\int_\gamma \omega_\gamma = 0$

Da studiare il caso $j = i+g$.

$$\int_S \omega_i \wedge \omega_{g+i} = \int_R \omega_i \wedge \omega_{g+i} \qquad g+i = j$$



$$\int_R d(f_i df_j) = \int_{\partial R} f_i df_j = \int_L df_j = \int_a^b df_j =$$ 11

$$f_j(b) - f_j(a) = -1.$$

Quindi la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ +1_g & 0 \end{pmatrix}$

FORME DIFFERENZIALI COMPLESSE

Sia $S$ una superficie di Riemann

Fatto 1: $S$ è orientabile.

$(U, \varphi)$ e $(V, \psi)$ due carte locali della struttura analitica

$$\mathbb{C} \supseteq \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{C}$$

$$F(z) = \psi \varphi^{-1}(z) \qquad F(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

$$\det JF = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ -v_x & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2$$

adesso F olomorfa implica

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)F = \frac{\partial F}{\partial x}$$

F isomorfismo $F'(z) \neq 0$ quindi $\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|^2 = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|^2 = u_x^2 + v_x^2 > 0$

Altra osservazione F olomorfa.

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0 .$$

D'ora in poi consideriamo

$$\mathcal{E}^0(S,\mathbb{C}) = \{ f : S \longrightarrow \mathbb{C} \quad f \text{ è } C^\infty \}$$

$$V(S,\mathbb{C}) = \{ \text{Derivazioni di } \mathcal{E}^0(S,\mathbb{C}) \}.$$

$$\mathcal{E}^k(S,\mathbb{C}) = A_k(V(S,\mathbb{C}))$$

Esempio i campi vettoriali complessi sono su $\mathbb{C}$.

$$a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

a, b funzioni $C^\infty$ a valori complessi

Le 1-forme $p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$

p, q funzioni a valori complessi

2 forme $\mu(x,y)\, dx \wedge dy$ $\quad \mu(x,y)$ funzione a valori complessi

Adesso $z = x+iy$ $\quad \bar{z} = x-iy$.

Possiamo riscrivere tutto usando.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$dz = dx + i\,dy \qquad d\bar{z} = dx - i\,dy.$$

$$dz \wedge d\bar{z} = 2i\, dx \wedge dy.$$

Quindi campi vettoriali $\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

$$\omega_1 = f(z)\,dz + g(z)\,d\bar{z} \qquad \omega_2 = f(z)\,dz \wedge d\bar{z}.$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

Definizione $\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz$ $\qquad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$

Quindi $d = \partial + \bar{\partial}$.

$\omega = f\,dz + g\,d\bar z \in \mathcal{E}^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar z}\right) dz \wedge d\bar z .$$

Passiamo adesso a $S$ superficie di Riemann

$\omega \in \mathcal{E}^1(S, \mathbb{C})$ Abbiamo delle carte locali $(U, \varphi)$

$$\omega|_U = f_U\,dz + g_U\,d\bar z \in \mathcal{E}^1(\varphi(U), \mathbb{C}).$$

$$\omega|_V = f_V\,dw + g_V\,d\bar w \in \mathcal{E}^1(\psi(V), \mathbb{C}).$$

Adesso in $\varphi(U \cap V)$ si ha l'applicazione olomorfa invertibile

$$\psi\varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap W)$$
$$z \longrightarrow w(z)$$

L'uguaglianza delle forme produce

$$f_U = f_V \frac{\partial w}{\partial z} + g_V \frac{\partial \bar w}{\partial z} = f_V \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$g_U = f_V \frac{\partial w}{\partial \bar z} + g_V \frac{\partial \bar w}{\partial \bar z} = g_V \frac{\partial \bar w}{\partial \bar z}$$

$$\begin{pmatrix} f_U \\ g_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial \bar w}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial \bar z} & \frac{\partial \bar w}{\partial \bar z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_V \\ g_V \end{pmatrix}$$

Questo perché $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$

e inoltre sapendo che $\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$

abbiamo anche che $\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$

La matrice jacobiana diventa

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} & 0 \\ 0 & \overline{\frac{\partial w}{\partial z}} \end{pmatrix}$$

Analogamente $\mu \in \mathcal{E}^2(S, \mathbb{C})$

$$\mu_U = h_U \, dz \wedge d\bar{z}$$

$$h_U = \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2 h_V.$$

Poiché la matrice Jacobiana è diagonale abbiamo che gli autospazi non dipendono dalle particolari coordinate

Allora in modo operazionale abbiamo un operatore

$$*: \mathcal{E}^1(S,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{E}^1(S,\mathbb{C})$$

$$\omega = \{\omega_U\} = \{f_U dz + g_U d\bar{z}\}$$

$$*\omega = \{*\omega_U\} = \{-i f_U dz + i g_U d\bar{z}\}$$

Poiché la jacobiana è diagonale $*$ commuta con il cambio di coordinate $\Rightarrow$ è ben definito

Proprietà

$** = -1$.

Autovettori

$$\mathcal{E}^{1,0}(S) = \{\omega \in \mathcal{E}^1(S,\mathbb{C}) / *\omega = -i\omega\}$$

$$\mathcal{E}^{0,1}(S) = \{\omega \in \mathcal{E}^1(S,\mathbb{C}) / *\omega = i\omega\}$$

$\omega = \{\omega_U\} \in \mathcal{E}^{1,0}(S) \qquad \omega_U = f_U dz$

$\omega = \{\omega_U\} \in \mathcal{E}^{0,1}(S) \qquad \omega_U = g_U d\bar{z}$.

$$\mathcal{E}^1(S,\mathbb{C}) = \mathcal{E}^{1,0}(S,\mathbb{C}) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(S,\mathbb{C})$$

(1,0) forme (0,1) forme

$$f \in \mathcal{E}^0(S,\mathbb{C}) \qquad df = \partial f + \bar{\partial} f$$

Complesso di de Rham

$$0 \to \mathcal{E}^0(S,\mathbb{C}) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(S,\mathbb{C}) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(S,\mathbb{C})$$

$$d^2 = 0$$

$$H^k_{dR}(S,\mathbb{C}) = H^k_{dR}(S,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

---

$U \subseteq S$ aperto

$$\mathcal{O}(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \ / \ f \text{ analitica} \}.$$

Definiamo ora le funzioni meromorfe.

$p \in U$ $(U,\varphi)$ carta locale centrata in $p$, i.e. $\varphi(p) = 0$

$f \in \mathcal{O}(U \setminus p)$ ha in $p$ un polo (zero di ordine $n$)

se $f\varphi^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi(U) \setminus \{0\})$ ha nel punto $p$ un

polo risp. uno zero di ordine $n$.

zero di ordine k significa
$f\varphi^{-1}$ e tutte le sue derivate fino all'ordine
k-1 svaniscono in 0.
e la derivata k-me non svanisce.

$$f\varphi^{-1} = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \qquad \underline{a_k \neq 0}$$

$f\varphi^{-1}$ ha un polo di ordine k. in zero
se ~~esiste~~ k è il minimo intero positivo t.c.

$$\lim_{z \to 0} z^k f\varphi^{-1}(z) \neq 0 \text{ esiste.}$$

In serie di Laurent

$$f\varphi^{-1}(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^k$$

con $a_{-k} \neq 0$.

Adesso la definizione potrebbe dipendere dalla carta locale, ma non è così infatti
se $\psi$ è un'altra carta locale intorno a p.

$\psi\varphi^{-1}(z)$ è biianalitica

Allora siamo nella seguente condizione

Studiare $F: U \longrightarrow F(U)$ isom analitico
$F(0) = 0$.

Più in generale (Lemma 6 Cap 1)

Sia $f$ analitica definita intorno a $0$ con $f(0)=0$

Allora esiste una carta locale $\varphi$ intorno a $0$

t.c. $f\varphi^{-1}(z) = z^n$ dove $n$ è l'ordine

della funzione $f$ nell'origine.

Infatti $f(z) = \sum_{k\geq 1} a_k z^k$ perchè $f(0)=0$

quindi $f(z) = z^n h(z)$ con $h(0)\neq 0$

poichè $h(0)\neq 0$ esiste una radice $n$-ma $l(z)$

di $h(z)$ intorno al punto $0$.

Quindi $f(z) = \left(z\, l(z)\right)^n$ $l(0)\neq 0$.

Adesso consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \varphi(U) \\ z &\longrightarrow z\, l(z) \end{aligned}$$

$\varphi$ è un'isomorfismo intorno al punto $0$ perchè la matrice jacobiana è del tipo.

$$\begin{pmatrix} \ell(z)+z\,\ell'(z) & 0 \\ 0 & \overline{\ell(z)+z\,\ell'(z)} \end{pmatrix} \quad \text{in } 0$$

abbiamo $\det \begin{vmatrix} \ell(0) & 0 \\ 0 & \overline{\ell(0)} \end{vmatrix} \neq 0.$

$\varphi$ è una carta locale e quindi

posto $\zeta = z\,\ell(z)$ abbiamo

$$f\varphi^{-1}(\zeta) = \zeta^n.$$

Quindi cambiando carta locale troviamo sempre lo stesso $n$.

Zeri O.K.

Per il polo di ordine $k$. basta considerare ~~Ruolo~~ $\dfrac{1}{f(z)}$ che avrà uno zero di ordine $k$.

Dato un aperto $U \subseteq S$.

$f$ è meromorfa in $U$ se $\forall$ carta locale $(V, \varphi)$ $V \subseteq U$

$f\varphi^{-1}$ è meromorfa in $\varphi(V)$

$\mathcal{M}(U)$ = anello delle funzioni meromorfe in $U$.

Abbiamo

$$\mathcal{C}^0(U, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{O}(U) \supseteq \mathcal{M}(U)$$

Se $U$ è un aperto connesso il teorema di continuazione analitica ci dice che gli zeri di una funzione meromorfa sono isolati e quindi $\mathcal{M}(U)$ è un campo.