Note sul Teorema di Sylvester

Sia V uno spazio vettoriale reale e $g(v,w)$ una forma bilineare simmetrica che induce un prodotto scalare

$$\langle v,w\rangle = g(v,w).$$

Una base $\mathcal{B}=\{v_1 \dots v_n\}$ è ortogonale rispetto al $\langle\,,\rangle$ se la matrice $\left(\langle v_i,v_j\rangle_{i,j=1\dots n}\right) = A \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$

Definiamo

$q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica determinata dal $\langle\,,\rangle$. ponendo $q(v)=\langle v,v\rangle$.

Ovviamente $q(\lambda v)=\lambda^2 q(v)$ e inoltre

$$2\langle v,w\rangle = q(v+w)-q(v)-q(w) \quad \forall v,w\in V.$$

Quindi q determina il prodotto scalare.

V spazio vettoriale $\langle\,,\rangle$ prodotto scalare, $\mathcal{B}=\{v_1 \dots v_n\}$ una base, S la matrice associata al prodotto scalare.

Se $v=\sum_i x_i v_i$ $\quad q(v)={}^tXSX = \sum_i S_{ij}x_ix_j$.

Esempio $\dim V = 2$ base v_1, v_2. matrice $S=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$$q(v) = 2(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$$

Abbiamo il seguente

<u>Teorema</u> Sia V uno spazio vettoriale reale, $\langle\,,\rangle$ prodotto scalare su V, allora esiste una base diagonalizzante il $\langle\,,\rangle$.

Dim: Induzione sulla dimensione di V.

$n=1$ o.k. Supponiamo vero il teorema per $\dim V = n-1$

dimostrando per $\dim V = n$. ②

Se il $\langle , \rangle$ non è identicamente nullo, abbiamo un vettore $v_1 \in V$ t.c. $\langle v_1, v_1 \rangle \neq 0$. Sia $W = v_1^{\perp} = \{ v \in V / \langle v_1, v \rangle = 0 \} \not\ni v_1$

$W \subsetneq V$ e inoltre $\mathrm{Span}(v_1) \oplus W = V$ infatti

$W \cap \mathrm{Span}\{v_1\} = 0$ inoltre $v \in V$ $\quad v - \dfrac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \in W$

quindi $v \in \mathrm{Span}\{v_1\} + W$.

Possiamo trovare basi ortogonali con migliori proprietà

Sia $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma quadratica $\langle , \rangle$ prodotto scalare associato. Indichiamo con $i_0(\varphi)$ la dimensione di

$V^{\perp} = \{ v \in V / \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in V \}$

Fissata una base $v_1 \dots v_n$ sia S la matrice associata al $\langle , \rangle$ la condizione $\langle v, w \rangle = 0$ in coordinate diventa

$Y^T S X = 0 \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n$. Quindi $v \in V^{\perp}$ se le sue coordinate soddisfano l'equazione $SX = 0$. Conseguentemente

$\dim V^{\perp} = n - rg(S) = n - r$.

Teorema (Sylvester) Sia $\langle , \rangle$ un prodotto scalare reale. Esiste una base $e_1 \dots e_n$ di V. t.c. la matrice associata al prodotto scalare è

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $e_1' \dots e_n'$ è un'altra base con matrice associata al $\langle , \rangle$

$$\begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 \\ 0 & I_{r'-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha $t = p$ e $r = r'$

Dim: Abbiamo $\dim V^\perp = n - r$. sia $e_{r+1} \dots e_n$ una base di $V^\perp$.

Sia $U \subseteq V$ t.c. $V^\perp \oplus U = V$. Restringiamo $\langle , \rangle$ a U e vediamo che è non degenere infatti $U^\perp = \{ v \in U / \langle u, v' \rangle = 0 \ \forall u' \in U \}$

Sia $u \in U^\perp \Rightarrow \langle u, u' \rangle = 0$ e anche $\langle v, \bar{v} \rangle = 0 \ \forall \bar{v} \in V^\perp$,

quindi $v \in V^\perp \Rightarrow u = 0$.. Sia $v_1 \dots v_r$ una base ortogonale di U ovviamente $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, altrimenti $v_i \in V^\perp$.

Ordiniamo i v_i in modo tale che $\langle v_i, v_i \rangle > 0$ $i = 1 \dots p$.

$\langle v_j, v_j \rangle < 0$ $j = p+1 \dots r$. Poniamo

$$e_i = \frac{v_i}{|\langle v_i, v_i \rangle|^{1/2}}, \quad \text{allora } \langle e_i, e_i \rangle = 1 \text{ se } i \leq p$$
$$= -1 \text{ se } i > p.$$

Adesso sia $e_1' \dots e_n'$ un'altra base ortogonale con uguali proprietà $\Rightarrow r = r' = n - i_0(\varphi)$.

Adesso $\langle e_j', e_j' \rangle \begin{cases} = 1 & j \leq t \\ -1 & j > t. \end{cases}$

Supponiamo che $t > p$ e cerchiamo una contraddizione

Sia $S = \langle e_1' \dots e_t' \rangle$ $\quad W = \langle e_{p+1} \dots e_r \rangle$

$\dim S = t$ $\quad \dim W = r - p$ $\quad \dim S + \dim W = r - p + t > r$.

Ovviamente $(S + W) \cap V^{\perp} = \{0\}$. Quindi $S \cap W \neq \{0\}$

Sia $v \in S \cap W$ $\quad v = \sum_{i=1}^{t} a_i e_i' = \sum_{j=p+1}^{r} b_j e_j$

Abbiamo $\langle v, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^{t} a_i e_i', \sum a_i e_i' \rangle = \sum a_i^2$.

$$\parallel$$

$$\langle \sum_{p+1}^{r} b_j e_j, \sum_{j=p+1}^{r} b_j e_j \rangle = -\sum b_j^2 \Rightarrow a_i = b_j = 0$$

quindi $v = 0$. Allora $t \leq p$. In modo simile $p \leq t \Rightarrow$ $p = t$.

Allora indicheremo con p l'indice di positività di φ.
con $r - p$ " " negatività di φ.

Il risultato di questo teorema permette di classificare le quadriche in $\mathbb{R}^n$.